2022 年度 数学科リレー講座

π と i と e の話 第 6 講

柴山　太郎 *

2022 年 8 月 25 日

1　はじめに

オイラーの公式はその重要性から，関連書籍が一般向けにも数多く出版されている [1–5]．ただし，何を前提（定義）として議論されているかは実は文献によって様々であり，いろいろな文献から議論をつまみ食いをしていると循環論法に陥ってしまいかねない．本稿は，議論の途中で迷子にならないように論理をまとめた筆者のメモである．数学的な論理の流れを重視して執筆しており，受講者に理解できるように丁寧に書いていないため，特に中学生諸君には少しハードルが高いかもしれない．（ただし高校生諸君は十分に読めるはずである！）基本的には板書やスライドで説明するので，そこで手を動かしながら理解していこう．

また，もっと詳しく知りたいものは文献を用いて各自学習すると良い [6–8]．

2　複素数乗の意味

2.1　オイラーの公式の証明

第 1 講から第 5 講までで既に紹介されている通り，以下の命題に現れる式 (1) が**オイラーの公式**である．

定理 1 (オイラーの公式)**.** 実数 θ に対して，以下の等式が成立する．

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta. \tag{1}$$

* 海城中学高等学校 数学科

ところが，左辺にある e の虚数乗はまだ定義されていないため，ここで定義する．

定義 2 (e の複素数乗)**.** すべての複素数 z に対して，e^z を

$$e^z := 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \cdots \tag{2}$$

と定義する[*1]．

すべての実数 x に対して，e^x は

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots \tag{3}$$

のように無限級数展開できることを思い出すと，式 (2) は自然な定義であると解釈できる．また，定義 2 において特に $z = i\theta$ とすると，

$$e^{i\theta} = 1 + \frac{i\theta}{1!} + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \cdots \tag{4}$$

が成立し，これがオイラーの公式の左辺の意味である．この意味に従って，定理 1 を証明する．

Proof. すべての実数 x に対して，$\cos x$，$\sin x$ は次のようにテイラー展開できる．

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots, \tag{5}$$

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots. \tag{6}$$

式 (4), (5), (6) より，

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= 1 + \frac{i\theta}{1!} + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \frac{(i\theta)^4}{4!} + \frac{(i\theta)^5}{5!} + \frac{(i\theta)^6}{6!} + \frac{(i\theta)^7}{7!} + \cdots && (7)\\ &= 1 + \frac{i\theta}{1!} - \frac{\theta^2}{2!} - \frac{i\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + \frac{i\theta^5}{5!} - \frac{\theta^6}{6!} - \frac{i\theta^7}{7!} + \cdots && (8)\\ &= \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \cdots\right) + i\left(\frac{\theta}{1!} - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \cdots\right) && (9)\\ &= \cos\theta + i\sin\theta && (10)\end{aligned}$$

が得られ，定理 1 が証明された[*2]． □

オイラーの公式において $\theta = \pi$ とすると，$\cos\pi = -1$，$\sin\pi = 0$ であることから，等式 $e^{\pi i} = -1$ が得られ，従って以下の**オイラーの等式**が導かれる．

系 3 (オイラーの等式)**.**

$$e^{\pi i} + 1 = 0. \tag{11}$$

[*1] 式 (2) の右辺はすべての z に対して収束するかどうかは現時点ではわかっておらず，厳密な議論を 4.1 章で与える．

[*2] 式 (9) において，無限級数の項の順序の入れ替えが許される理由は本来はきちんと議論されるべきであり，これについては 4.2 章で詳しく述べる．

2.2 e の複素数乗の性質

式 (2) の左辺は指数関数の形をしているが，定義域を実数とした指数関数における重要な性質のいくつかは，実は複素数においても成立し，そのひとつが次の定理である．

定理 4. すべての複素数 z_1, z_2 に対して，以下の等式が成立する．

$$e^{z_1}e^{z_2} = e^{z_1+z_2}. \tag{12}$$

Proof. 定義 2 より，

$$e^{z_1}e^{z_2} = \left(1 + \frac{z_1}{1!} + \frac{{z_1}^2}{2!} + \frac{{z_1}^3}{3!} + \cdots\right)\left(1 + \frac{z_2}{1!} + \frac{{z_2}^2}{2!} + \frac{{z_2}^3}{3!} + \cdots\right), \tag{13}$$

$$e^{z_1+z_2} = 1 + \frac{z_1+z_2}{1!} + \frac{(z_1+z_2)^2}{2!} + \frac{(z_1+z_2)^3}{3!} + \cdots. \tag{14}$$

式 (13) の右辺を展開し，z_1 と z_2 の次数の和が n（ただし n は 0 以上の整数）となる項を集め，二項定理を用いて計算すると以下のようになる．

$$\frac{{z_1}^n}{n!} + \frac{{z_1}^{n-1}z_2}{(n-1)!1!} + \frac{{z_1}^{n-2}{z_2}^2}{(n-2)!2!} + \cdots + \frac{z_1{z_2}^{n-1}}{1!(n-1)!} + \frac{{z_2}^n}{n!} = \frac{(z_1+z_2)^n}{n!}. \tag{15}$$

式 (14) と式 (15) により定理 4 が証明された[*3]． □

定理 4 において特に $z_1 = x$, $z_2 = iy$（ただし x, y は実数）とすると，任意の複素数 $z = x + iy$ における実部と虚部は，オイラーの公式より以下のように求められる．

$$\begin{aligned} e^z &= e^{x+iy} && (16)\\ &= e^x e^{iy} && (17)\\ &= e^x(\cos y + i\sin y) && (18)\\ &= e^x\cos y + ie^x\sin y. && (19) \end{aligned}$$

つまり，e^z の実部は $e^x\cos y$，虚部は $e^x\sin y$ である．

式 (18) により，特に e^x は正の実数全体をとり得るので，0 以外の任意の複素数 w は必ず e^z の形で表すことができる．ただし，以下のように表し方は一意ではない．

$$\begin{aligned} w &= |w|\{\cos(\arg w + 2\pi k) + i\sin(\arg w + 2\pi k)\} && (20)\\ &= e^{\log|w|}e^{i(\arg w + 2\pi k)} && (21)\\ &= e^{\log|w| + i(\arg w + 2\pi k)}. && (22) \end{aligned}$$

ここで k は任意の整数である．

[*3] 式 (15) のように，式 (13) の左辺から項を取り出してひとまとめにすることが許される理由も本来は述べるべきであり，これについては 4.3 章で詳しく述べる．

2.3　複素数の複素数乗の定義

実数においては任意の正の実数 x に対して，$x = e^y$ を満たすような y がただひとつ存在し，その y の値を $\log x$ と定義して対数関数と呼んだ．ただし，上記で観察したように，任意の 0 でない複素数 w に対して，$w = e^z$ を満たすような z は存在するが，ただひとつではないため，複素数においては対数関数を定義できない[*4]．そのため，通常は $-\pi < \arg w \leqq \pi$ かつ $k = 0$ を仮定して，ただひとつの値をとる一価関数として，次のように複素数を定義域とする対数関数を定義する．

定義 5 ($\operatorname{Log} w$)**.** 0 でない複素数 w に対して，対数関数 $\operatorname{Log} w$ を

$$\operatorname{Log} w \coloneqq \log |w| + i(\arg w) \tag{23}$$

と定義する．ただし，$-\pi < \arg w \leqq \pi$ とする．

定義 5 における対数関数の概念を用いることで，e の複素数乗の定義を複素数の複素数乗に拡張できる．

定義 6 (w^z)**.** 0 でない複素数 w と任意の複素数 z に対して，w^z を

$$w^z \coloneqq e^{(\operatorname{Log} w)z} \tag{24}$$

と定義する．

定義 6 に加えて $w = 0$ のとき，0^z は $z \neq 0$ のときは 0 と定め，0^0 は定義しないのが普通である．

3　オイラーの公式から考察される性質

3.1　三角関数の指数関数による表記

オイラーの公式 (1) において，x を $-x$ に置き換えると，$\cos(-x) = \cos x, \sin(-x) = \sin x$ であるから，

$$e^{-ix} = \cos(-x) + i \sin(-x) \tag{25}$$
$$= \cos x - i \sin x \tag{26}$$

となる．式 (1) と式 (26) の両辺を足して 2 で割ると，

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \tag{27}$$

[*4] 2 つ以上の値をとる関数（多価関数）として解釈する立場もある．

が得られ，両辺を引いて $2i$ で割ると，

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \tag{28}$$

が得られる．

3.2 複素数の積と商

任意の複素数 z は，その絶対値 $|z| = r$ と偏角 $\arg z = \theta$ を用いて，

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \tag{29}$$

と表される．これはオイラーの公式を用いると以下のように簡単に書くことができる．

$$z = re^{i\theta}. \tag{30}$$

この表示を用いると，複素数の乗法の図形的な意味を簡単に与えることができる[*5]．

定理 7. 0 でない複素数 z_1, z_2 に対して，以下の等式が成立する．

$$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|, \quad \arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2. \tag{31}$$

Proof. $|z_1| = r_1$, $\arg z_1 = \theta_1$, $|z_2| = r_2$, $\arg z_2 = \theta_2$ とすると，定理 4 より，

$$z_1 z_2 = r_1 e^{i\theta_1} r_2 e^{i\theta_2} = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)} \tag{32}$$

となる．よって，

$$|z_1 z_2| = r_1 r_2 = |z_1||z_2|, \tag{33}$$

$$\arg(z_1 z_2) = \theta_1 + \theta_2 = \arg z_1 + \arg z_2 \tag{34}$$

が得られ，定理 7 が証明された． □

さらに，式 (26) を考慮することで，次の除法の性質が簡単に導かれる．

定理 8. 0 でない複素数 z_1, z_2 に対して，以下の等式が成立する．

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2. \tag{35}$$

Proof. $|z_1| = r_1$, $\arg z_1 = \theta_1$, $|z_2| = r_2$, $\arg z_2 = \theta_2$ とすると，式 (26) を用いることで，

$$\frac{1}{z_2} = \frac{1}{r_2 e^{i\theta_2}} = \frac{1}{r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)} = \frac{1}{r_2}(\cos\theta_2 - i\sin\theta_2) = \frac{e^{-i\theta_2}}{r_2} \tag{36}$$

が得られる．よって，定理 4 より，

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i\theta_1} e^{-i\theta_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)} \tag{37}$$

が得られ，定理 8 が証明された． □

[*5] 通常は式 (29) のまま三角関数の計算によって証明される関係が，指数関数の計算規則によって簡単に証明できるのである．

定理 7 と定理 8 を用いることで，以下のド・モアブルの定理が示される[*6]．

系 9 (ド・モアブルの定理)**.** 整数 n に対して，以下の等式が成立する．

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta \tag{38}$$

ド・モアブルの定理は以下のように指数表記すると覚えやすい．

$$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta} \tag{39}$$

4　前の章における厳密な議論

無限級数において，安易に項の入れ替えをしてはいけないとは言ったものの，それではどのように議論するのかを説明しないのも不親切だと思ったので，ここに厳密な議論を載せる．この章の話は中学生は理解しなくて良いが，興味のあるものは自分で勉強・研究をしてみよう．

4.1　収束半径

一般にべき級数

$$\alpha_0 + \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \alpha_3 z^3 + \cdots \tag{40}$$

に対して，この収束，発散について次の 3 つのうちのいずれかが成立する．

1. $z = 0$ 以外では，すべての z に対して発散する．このとき，収束半径は 0 であるという．
2. すべての z で収束する．このとき，収束半径は ∞ であるという．
3. ある正の数 r が存在して，$|z| < r$ では収束，$|z| > r$ では発散する．このとき，収束半径は r であるという．

収束半径は以下の定理を利用して計算できる．

定理 10 (ダランベールの判定法)**.** べき級数 (40) について，

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}}\right| \tag{41}$$

が存在するならば，その値は収束半径 r に一致する．

証明はここでは与えない[*7]．例えば，式 (2) では，

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n\to\infty}(n+1) = \infty \tag{42}$$

[*6] ド・モアブルの定理は，定理 7 と定理 8 の図形的な意味を考慮すれば明らかなため，ここでは証明を与えていない．

[*7] ダランベールの判定法は，コーシー・アダマールの判定法を用いて簡単に証明できる．コーシー・アダマールの証明については解析的な手法を用い，複素数というテーマから少しずれるためここでは証明を与えなかった．

であるから，収束半径は ∞ であり，すべての複素数 z に対して e^z はきちんと定義できることがわかる．

4.2 オイラーの公式の証明における項の入れ替えについて

定理 1 の証明において，無限級数における項の入れ替えをしたが，これは厳密にはやってはいけない操作である．従って，セオリー通り第 n 部分和を考えてから極限をとる方法をここでは紹介する．難しくはないが，中学生には馴染みがないであろうと判断し，講義ではこの方法を用いない．

Proof. 以下のように，式 (2) における $(n+1)$ 番目の項までの和を $E_n(\theta)$ とする．

$$E_n(\theta) = 1 + \frac{i\theta}{1!} + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \frac{(i\theta)^3}{3!} + \cdots + \frac{(i\theta)^n}{n!}. \tag{43}$$

$E_n(\theta)$ は複素数なので，実部 $F_n(\theta)$ と虚部 $G_n(\theta)$ を用いて，$E_n(\theta) = F_n(\theta) + iG_n(\theta)$ という形で表すことができ，具体的には，

$$F_n(\theta) = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \cdots + \frac{i^k\theta^k}{k!}, \tag{44}$$

$$G_n(\theta) = \frac{\theta}{1!} - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \cdots + \frac{i^{l-1}\theta^l}{l!} \tag{45}$$

である．ただし式 (44), (45) において，n が偶数であれば $k = n,\ l = n-1$ であり，n が奇数であれば $k = n-1,\ l = n$ である．ここで，

$$\lim_{n\to\infty} F_n(\theta) = \cos\theta, \tag{46}$$

$$\lim_{n\to\infty} G_n(\theta) = \sin\theta \tag{47}$$

であることは式 (5), (6) から明らかであるから，

$$e^{i\theta} = \lim_{n\to\infty} E_n(\theta) = \lim_{n\to\infty} \{F_n(\theta) + iG_n(\theta)\} = \cos\theta + i\sin\theta \tag{48}$$

が導かれる． □

上記では，高校生にも理解できるように記述したが，一般に絶対収束級数は項を並べ替えても絶対収束し，極限は変わらないことが知られている．さらに絶対収束する級数は収束することも知られている[*8]．

定義 11 (絶対収束)**.** 級数 $z_0 + z_1 + z_2 + \cdots$ が絶対収束するとは，

$$|z_0| + |z_1| + |z_2| + \cdots \tag{49}$$

が収束することをいう．

[*8] これらの事実の証明は，実数列の場合の証明をほとんど修正することなく複素数の場合に適用できる．

今回の場合は，

$$|1|+\left|\frac{i\theta}{1!}\right|+\left|\frac{(i\theta)^2}{2!}\right|+\left|\frac{(i\theta)^3}{3!}\right|+\cdots=1+\frac{|\theta|}{1!}+\frac{|\theta|^2}{2!}+\frac{|\theta|^3}{3!}+\cdots \tag{50}$$

となるため，式 (50) の右辺は収束するので，式 (4) は絶対収束する．すなわち，項の入れ替えは許されるのである．

4.3　定理 4 の厳密な証明

2.2 章で扱った定理 4 の証明も修正しておく[*9]．

Proof. 以下のように，式 (14) における $(N+1)$ 番目の項までの和を S_N とする．

$$S_N=1+\frac{z_1+z_2}{1!}+\frac{(z_1+z_2)^2}{2!}+\frac{(z_1+z_2)^3}{3!}+\cdots+\frac{(z_1+z_2)^N}{N!}. \tag{51}$$

このとき，式 (15) の考察から，

$$S_N=\sum_{n=0}^{N}\left(\frac{{z_1}^n}{n!}+\frac{{z_1}^{n-1}z_2}{(n-1)!1!}+\frac{{z_1}^{n-2}{z_2}^2}{(n-2)!2!}+\cdots+\frac{z_1{z_2}^{n-1}}{1!(n-1)!}+\frac{{z_2}^n}{n!}\right) \tag{52}$$

$$=\sum_{n=0}^{N}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{{z_1}^k{z_2}^{n-k}}{k!(n-k)!}\right) \tag{53}$$

が成り立つ．ここで，

$$S_N^+=|1|+\left|\frac{z_1+z_2}{1!}\right|+\left|\frac{(z_1+z_2)^2}{2!}\right|+\left|\frac{(z_1+z_2)^3}{3!}\right|+\cdots+\left|\frac{(z_1+z_2)^N}{N!}\right| \tag{54}$$

とすると，式 (53) より，

$$S_N^+=\sum_{n=0}^{N}\left|\sum_{k=0}^{n}\frac{{z_1}^k{z_2}^{n-k}}{k!(n-k)!}\right|=\sum_{n=0}^{N}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{|z_1|^k|z_2|^{n-k}}{k!(n-k)!}\right)=\sum_{n=0}^{N}\frac{|z_1|^n}{n!}\sum_{n=0}^{N}\frac{|z_2|^n}{n!} \tag{55}$$

が成り立つ．よって式 (55) の右辺は $N\to\infty$ で収束するため，式 (14) は絶対収束し，ゆえに収束する．ここで，

$$\left|\sum_{n=0}^{N}\frac{(z_1+z_2)^n}{n!}-e^{z_1}e^{z_2}\right| \tag{56}$$

$$\leqq\left|\sum_{n=0}^{N}\frac{(z_1+z_2)^n}{n!}-\sum_{n=0}^{N}\frac{{z_1}^n}{n!}\sum_{n=0}^{N}\frac{{z_2}^n}{n!}\right|+\left|\sum_{n=0}^{N}\frac{{z_1}^n}{n!}\sum_{n=0}^{N}\frac{{z_2}^n}{n!}-e^{z_1}e^{z_2}\right| \tag{57}$$

$$\leqq\left|\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{(z_1+z_2)^n}{n!}\right|+\left|\left(\sum_{n=0}^{N}\frac{{z_1}^n}{n!}-e^{z_1}\right)\sum_{n=0}^{N}\frac{{z_2}^n}{n!}\right|+\left|e^{z_1}\left(\sum_{n=0}^{N}\frac{{z_2}^n}{n!}-e^{z_2}\right)\right| \tag{58}$$

[*9] 定理 4 においては，項の入れ替えだけでなく，式 (13) と式 (14) における “項” の概念に違いがあるというところにも難しさがある．

である．さらに，

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{{z_1}^n}{n!} = e^{z_1}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{{z_2}^n}{n!} = e^{z_2} \tag{59}$$

であることに注意すると，

$$\lim_{N\to\infty} \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{(z_1+z_2)^n}{n!} \right| = 0, \tag{60}$$

$$\lim_{N\to\infty} \left| \left(\sum_{n=0}^{N} \frac{{z_1}^n}{n!} - e^{z_1} \right) \sum_{n=0}^{N} \frac{{z_2}^n}{n!} \right| = 0, \tag{61}$$

$$\lim_{N\to\infty} \left| e^{z_1} \left(\sum_{n=0}^{N} \frac{{z_2}^n}{n!} - e^{z_2} \right) \right| = 0 \tag{62}$$

が成り立つことがわかる．ゆえに式 (58) と合わせて，

$$\lim_{N\to\infty} S_N = \lim_{N\to\infty} \left(\sum_{n=0}^{N} \frac{(z_1+z_2)^n}{n!} \right) = e^{z_1} e^{z_2}, \tag{63}$$

つまり，$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}$ であることが証明された． □

上記の証明では，式が煩雑になるためシグマ記号を用いた．また，式 (58) における評価で説明不足の点がややあるがご容赦いただきたい．

なお，式 (52) の右辺において $N \to \infty$ とした級数は，2 つの無限級数 (59) のコーシー積として知られている．2 つの絶対収束級数のコーシー積は絶対収束し，そのコーシー積の極限は元の級数の極限の積になることが知られており[*10]，その事実を知っていれば 2.2 章の議論のみで十分と言える．

参考文献

[1] 原岡喜重. オイラーの公式がわかる. 講談社, 2013.

[2] 鈴木貫太郎. 中学の知識でオイラーの公式がわかる. 光文社新書, 2020.

[3] 示野信一. 複素数とはなにか. 講談社, 2012.

[4] 吉田武. オイラーの贈物. 東海大学出版会, 2010.

[5] 佐藤敏明. 世界一美しい数式「$e^{i\pi} = 1$」を証明する. 日本能率協会マネジメントセンター, 2019.

[6] 志賀浩二. 複素数 30 講. 朝倉書店, 1989.

[7] 野口潤次郎. 複素解析概論. 裳華房, 1993.

[8] 神保道夫. 複素関数入門. 岩波書店, 1995.

[*10] 例えば [7] などを参照せよ．