本校高3生による欧州査読付名門数学雑誌 NNTDM への論文掲載の快挙を祝う

無限級数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ が発散することを示すことは，理系の大学数学入試の頻出問題です.

一方、$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$となると，

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}<1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{(n-1)n}$$

$$=1+\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)=2-\frac{1}{n}$$

となり，この無限級数は収束しますが，その収束値を求めるのは，高校数学の学習範囲を超えることになります.

最初にこの値を求めることは，1644 年メンゴリ（イタリア）によって提起されました.

後にこの問題は“バーゼル問題”と称せられ，18 世紀初頭の多くの数学者が頭を悩ませました．史実によれば，かのライプニッツ（ドイツ）でさえも白旗をあげた，とあります.

そのなかにあって，「多面体定理」や「$e^{\pi i}=-1$」など，数多の発見で知られるオイラー（スイス）がこの値を求めました．これは，次の手法に依ります：

【STEP1】$\sin x$を級数展開する：　$\sin x=x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\frac{1}{7!}x^7+\cdots$　…①

【STEP2】$\sin x=0$を解くと，$x=0$，$\pm\pi$，$\pm 2\pi$，$\pm 3\pi$，…なので,

$$\sin x=x\left(1-\frac{x}{\pi}\right)\left(1+\frac{x}{\pi}\right)\left(1-\frac{x}{2\pi}\right)\left(1+\frac{x}{2\pi}\right)\left(1-\frac{x}{3\pi}\right)\left(1+\frac{x}{3\pi}\right)\ldots\quad\cdots②$$

と“因数分解”する.

（注）$\sin x=x(x-\pi)(x+\pi)(x-2\pi)(x+2\pi)(x-3\pi)(x+3\pi)\ldots$と考えるのが普通ですが，この後の計算を見てみると，このようにしておくのが良いことが察せられることでしょう.

【STEP3】$x\neq 0$として，①，②より,

$$x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\frac{1}{7!}x^7+\cdots=x\left(1-\frac{x}{\pi}\right)\left(1+\frac{x}{\pi}\right)\left(1-\frac{x}{2\pi}\right)\left(1+\frac{x}{2\pi}\right)\left(1-\frac{x}{3\pi}\right)\left(1+\frac{x}{3\pi}\right)\ldots$$

となり，両辺でx^3の係数を比較すると,

$$\frac{1}{3!}=\frac{1}{\pi^2}+\frac{1}{4\pi^2}+\frac{1}{9\pi^2}+\cdots$$

となるので，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$となることが示されました．時に，1735 年のことです.

さすれば，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$の収束，発散は？と進むのが人情でありましょう.

事実，これも多くの数学者により挑まれましたが，解決したのはなんと 243 年後の 1978 年で，アペリー（フランス）によって，1.2020569…（無理数）に収束することが示されました．

ここで，s を複素数，nを自然数とするとき，

$$\zeta(\mathrm{s}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

で定義されるζを，“リーマンゼータ関数”と称し（リーマンは 19 世紀のドイツの数学者），

その様相は実に豊饒な内容をもつものの，

“リーマンゼータ関数の非自明な零点の実部は$\frac{1}{2}$である”

という有名な“リーマン予想”に対して，100 万ドルの懸賞金がかけられている（アメリカのクレイ数学研究所による）ように，解明と理解が難解であることが少なくありません．

この度，本校高 3 生で数学部の池田隼君，宇井貴斗君，東風谷順正君が，この分野に関する新しい発見をし，その成果を英文で論文にして，欧州の査読付き名門数学誌である

Notes on Number Theory and Discrete Mathematics（通称“NNTDM”）

に投稿．掲載の栄に浴すこととなりました．論文名は，

A simple proof of Linas’s theorem on Riemann zeta function

です（https://nntdm.net/volume-27-2021/number-4/90-94/）．

彼らの成果は，2012 年に Linas Vepstas 博士の発見したある結果の証明を，双曲線関数のフーリエ級数展開を技巧的に用いて，実にシンプルにリライトしたものです．

フーリエ級数展開を用いるアイデアは，本校で毎年夏に開催される“数学科リレー講座”で，『フーリエ生誕 250 周年記念』（2018 年 8 月）https://www.kaijo.ed.jp/students/18402 を行った際，彼らがこのセミナーに参加した（中学生時）ことがきっかけとのことです．

多忙な高 3 生の 3 人が，受験勉強の傍ら，ブレーンストーミングにより，この分野に足跡を残したことを誇りたく思います．

池田隼君，宇井貴斗君，東風谷順正君，この度の快挙，誠におめでとうございます．

今後の彼らの益々の健筆を心から祈念するとともに、彼らに続く本校生の出現を期待せずにはおれません．

（海城中学高等学校数学科）