新城門プロジェクト①

2017・11・8

新モンゴル高校数学科　　海城中高数学科

本日の進行

①開講の辞（15：50〜16：00）
柴田澄雄・海城中高校長
P. ナランバヤル・新モンゴル高校校長
（パリご出張中のためVTRにて）

②本講座スタッフの紹介と概要説明（16：00〜05）

③授業（16：05〜17：20終了予定）　内容：数と式

【1】

（1） $x^4 \geq x^2$

（誤答）

両辺を x^2 で割ると $x^2 \geq 1$

$\therefore\ x^2 - 1 = (x+1)(x-1) \geq 0$

$\therefore\ x \leq -1,\ 1 \leq x$

（Q) 間違いを指摘せよ。

両辺を変数で割るのは

怖い！

☞ 不等式の基本は

差をとることがスタート！！

$$x^4 - x^2 = x^2(x+1)(x-1) \geq 0$$

$$\therefore\ -1 \leqq x, x = 0, 1 \leqq x$$

（2）～（4）は授業で解答します

（2） $(x+2)(x+1)^2 x^3 (x-1)^4 (x-2)^5 \leq 0$

（3） $\dfrac{3}{1+\dfrac{2}{x}} \geq x^2$

（4） $\dfrac{(x+1)x^2(x-1)}{(x+2)(x-2)} \geq 0$

答

（2） $x \leqq -2, x=-1, 0 \leqq x \leqq 2$

（3） $-3 \leqq x < -2, 0 \leqq x \leqq 1$

（4） $x < -2, -1 \leqq x \leqq 1, 2 < x$

☞（4）は「$\dfrac{(x+1)x^2(x-1)}{(x+2)(x-2)} \leqq 0$ を解け」ならば答は

$-2 < x \leqq -1, x=0, 1 \leqq x < 2$

【2】

（1）

左辺ー右辺 $= ab + 1 - a - b$

$$= a(b-1) - (b-1)$$

$$= (b-1)(a-1)$$

■

（2）

左辺ー右辺 $= a(bc-1) - (bc-1)$

$$= (bc-1)(a-1)$$

■

（3）☞前問の結果を利用できないかを考える！

（2）の不等式の両辺に(　　　)を足すと，

$$abc + 2 > a + bc + 1$$

を得る。

∴　$a + bc + 1 > a + b + c$

を得る。

すなわち，

$$bc + 1 > b + c$$

を示せばよいが，

これは（1）で示した不等式と同じである。■

【3】

これから正答と誤答を1つずつ提示します。

誤答の場合，どこが誤りの原因なのでしょうか？

まずは誤答から

$a>0, b>0$ なので $\frac{1}{b}>0, \frac{4}{a}>0$

∴相加平均・相乗平均の不等式より

$$a+\frac{1}{b} \geq 2\sqrt{a \times \frac{1}{b}}$$

$$\frac{4}{a}+b \geq 2\sqrt{\frac{4}{a} \times b}$$

これらを辺々かけあわせると,

$$\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(\frac{4}{a}+b\right) \geq 4\sqrt{\frac{a}{b} \times \frac{4b}{a}} = 8$$

となる。

∴求める最小値は8である。

☞どこが誤答の原因ですか？

理由

$a+\frac{1}{b}\geq 2\sqrt{a\times\frac{1}{b}}$ の等号成立条件は $a=\frac{1}{b}$

$\frac{4}{a}+b\geq 2\sqrt{\frac{4}{a}\times b}$ の等号成立条件は $\frac{4}{a}=b$

なので，これらは“同時に成り立たない”から。

では正解を

$$与式 = a \times \frac{4}{a} + ab + \frac{4}{ab} + \frac{1}{b} \times b$$

$$= ab + \frac{4}{ab} + 5$$

ここで，$a > 0, b > 0$ なので $ab > 0, \frac{4}{ab} > 0$

∴　相加平均・相乗平均の不等式より，

$$ab + \frac{4}{ab} \geq 2\sqrt{ab \times \frac{4}{ab}} = 4$$

となり，等号は $ab = 2$ のとき成り立つ。

∴　与式 $\geq 4 + 5 = 9$

∴　求める最小値は9である。

§2【4】　方針：背理法で示す

$$ax^2+2bx+c=0,$$
$$bx^2+2cx+a=0,$$
$$cx^2+2ax+b=0$$

のすべてが実数解をもたないとする。
このとき，判別式のすべてが負なので，

$$\begin{cases} b^2-ca<0 \\ c^2-ab<0 \\ a^2-bc<0 \end{cases}$$

となる。
これらの辺々の和をとると，

$$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca<0$$

となる。ところが,

$$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$$

$$=\frac{1}{2}\left\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right\}$$

$$(=\left(a-\frac{b+c}{2}\right)^2+\frac{3}{4}(b-c)^2)\geq 0$$

なので矛盾が生じる。

したがって,題意は証明された。

■