

1 次関数をもう一度

ここでの内容は2次関数のときにも使えるものばかりです。しっかり理解しましょう。

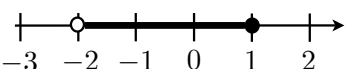
1 (そもそも) 関数とは？

定義. 定まった値をとる文字を**定数**、様々な値をとる文字を**変数**という。

変数の値のとりうる範囲を**変域**という。

注意. 変域の詳細についてはグラフのところで扱う。

例. 変数 x が、 -2 より大きく 1 以下の値をとるとき、 $-2 < x \leq 1$ のように表す。

また、数直線上では、 x のように表す。

定義. 2つの変数 x, y があり、変数 x の各々の値に対して、変数 y の値が唯一つに定まるとき、 y は x の関数であるという。

このとき、変数 x の変域を**定義域**、変数 y の変域を**値域**ともいう。

注意. y は x の関数であるとは、「(入力) $x \mapsto y$ (出力)」ということ。先に x の値を決め、その値に対して y の値が決まる。

逆に、先に y の値が決まり、その値に対して x の値が決まるのであれば、(つまり $y \mapsto x$ であれば、) x は y の関数になる。

「 $\bigcirc\bigcirc$ は $\triangle\triangle$ の関数」というとき、 $\bigcirc\bigcirc$ と $\triangle\triangle$ がどの変数であるかを注意すること。いつも y が x の関数とは限らない。

例. $y = (x \text{ の式})$ で表されているときは、各々の x の値に対して、右辺を計算すれば y の値が唯一つに定まるので、 y は x の関数である。

- $y = 3x$ (比例)
- $y = \frac{3}{x}$ (反比例)
- $y = 2x - 1$ (1 次関数)
- $y = -3x^2$ (2 乗に比例する関数)
- $y = 3x^2 + 5x + 2$ (2 次関数)

y が x の関数であっても、必ずしも x の式で表されている必要はない.

x (出席番号)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y (成績)	82	60	94	64	94	63	60	82	94	20

この場合、出席番号 x の値を定めると、その番号の生徒の成績 y が定まるので y は x の関数である.

逆に、成績 y からその成績をとった生徒の出席番号 x を唯一つに定めることは必ずしもできないので x は y の関数ではない. (あまりできの良くない $y = 20$ 点の生徒は $x = 10$ 番の生徒だ! と特定できてしまうが、割とできの良い $y = 94$ 点のときは $x = 3$ 番または $x = 5$ 番または $x = 9$ 番と一人に特定することはできない)

■ 変化の割合

定義. x の関数 y において、 $x = x_1$ のとき $y = y_1$, $x = x_2$ のとき $y = y_2$ とする.

このとき、 $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ の値を x が x_1 から x_2 に変化するときの関数 y の**変化の割合**という.

例. $x = 3$ から $x = 5$ に変化するときの変化の割合を求めてみる.

- $y = 3x$ (比例)

$x = 3$ のとき $y = 3 \times 3 = 9$, $x = 5$ のとき $y = 3 \times 5 = 15$ なので,

$$(\text{変化の割合}) = \frac{15 - 9}{5 - 3} = \frac{6}{2} = 3$$

- $y = \frac{3}{x}$ (反比例)

$x = 3$ のとき $y = \frac{3}{3} = 1$, $x = 5$ のとき $y = \frac{3}{5}$ なので,

$$(\text{変化の割合}) = \frac{\frac{3}{5} - 1}{5 - 3} = \frac{-\frac{2}{5}}{2} = -\frac{1}{5}$$

- $y = 2x - 1$ (1 次関数)

$x = 3$ のとき $y = 2 \times 3 - 1 = 5$, $x = 5$ のとき $y = 2 \times 5 - 1 = 9$ なので,

$$(\text{変化の割合}) = \frac{9 - 5}{5 - 3} = \frac{4}{2} = 2$$

- $y = -3x^2$ (2 乗に比例する関数)

$x = 3$ のとき $y = -3 \times 3^2 = -27$, $x = 5$ のとき $y = -3 \times 5^2 = -75$ なので,

$$(\text{変化の割合}) = \frac{-75 - (-27)}{5 - 3} = \frac{-48}{2} = -24$$

- $y = 3x^2 + 5x + 2$ (2 次関数)

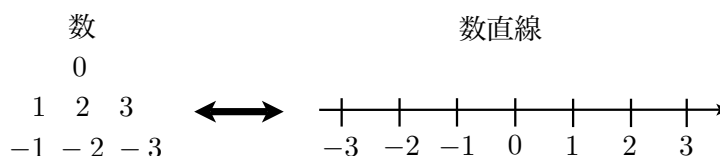
$x = 3$ のとき $y = 3 \times 3^2 + 5 \times 3 + 2 = 44$, $x = 5$ のとき $y = 3 \times 5^2 + 5 \times 5 + 2 = 102$ なので,

$$(\text{変化の割合}) = \frac{102 - 44}{5 - 3} = \frac{58}{2} = 29$$

2 (そういえば) 座標って何？

関数の数値だけ見ても、その関数の性質はなかなかわかりにくいので、視覚的（図形的）に理解するための道具として、座標を考える。

例. 数を視覚的（図形的）に表したのものに**数直線**がある。



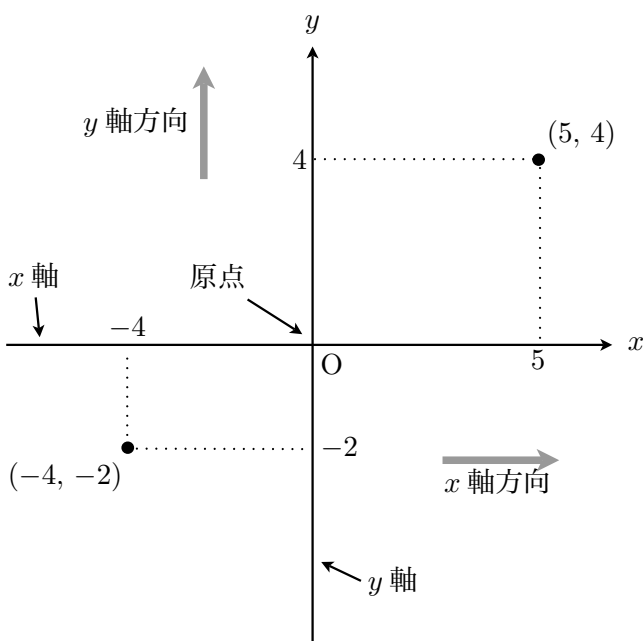
数の大小や、2つの数の間の距離（差）が視覚的にわかりやすい

関数は2つの変数の関係であるので、2つの数の組 (x, y) を視覚的（図形的）に表せると、関数の性質を理解するのに役に立つことが期待される。そのための道具として**座標平面**を考える。

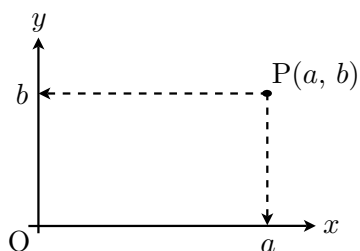
定義. 変数が2つあるので、2つの数直線を垂直に配置する。そして、横の軸を変数 x を測る **x 軸**，縦の軸を変数 y を測る **y 軸** とする。

x 軸と y 軸の交点を**原点 O** といい、 $x = 0, y = 0$ とする。

そして、数 (x, y) を、原点 O から、 x 軸方向に値 x だけ、 y 軸方向に値 y だけ測った点に対応させる。



逆に平面上のすべての点 P は、原点から x 軸方向・ y 軸方向にどれだけ離れてるかを測ることで2つの数の組 (a, b) で表すことができる。



このとき、点 P の座標は (a, b) であるといい、値 a のことを点 P の x 座標、値 b のことを点 P の y 座標という。また $P(a, b)$ のように表す。

3 (いよいよ) グラフについて

関数の性質を視覚的（図形的）に理解するためにグラフを用いる。

定義. y を x の関数とすると、 x の各々値に対し y の値が唯一つに定まるので、座標平面上に点 (x, y) をとる（プロットする）と、各々の x の値に対し y 軸方向には 1 つ点しかないので、これらを結ぶと 1 つの線ができる。このようにしてできた線を**関数のグラフ**という。

注意. 詳しい性質を調べるためには、より正確なグラフをかく必要があるが、そのためにはより多くの点をとる、つまりより多くの x に対しての関数の値 y を計算しなければならない。

パソコンで関数のグラフをかくときは、見た目がなめらかになる程度に多くの点を計算して結んでいる。

一方、手でグラフをかくときは、毎回多くの計算をすることは現実的ではない。ではどのような方針でグラフをかくのか？

関数ごとにグラフの概形、例えば 1 次関数は直線、2 次関数は放物線、反比例は双曲線などとわかっているの、ポイントを押さえて必要最小限の点を計算して点を取り、あとはなめらかに結んでいくという方法をとる。

そのためにも、それぞれの関数のグラフの性質を知っておく必要がある。

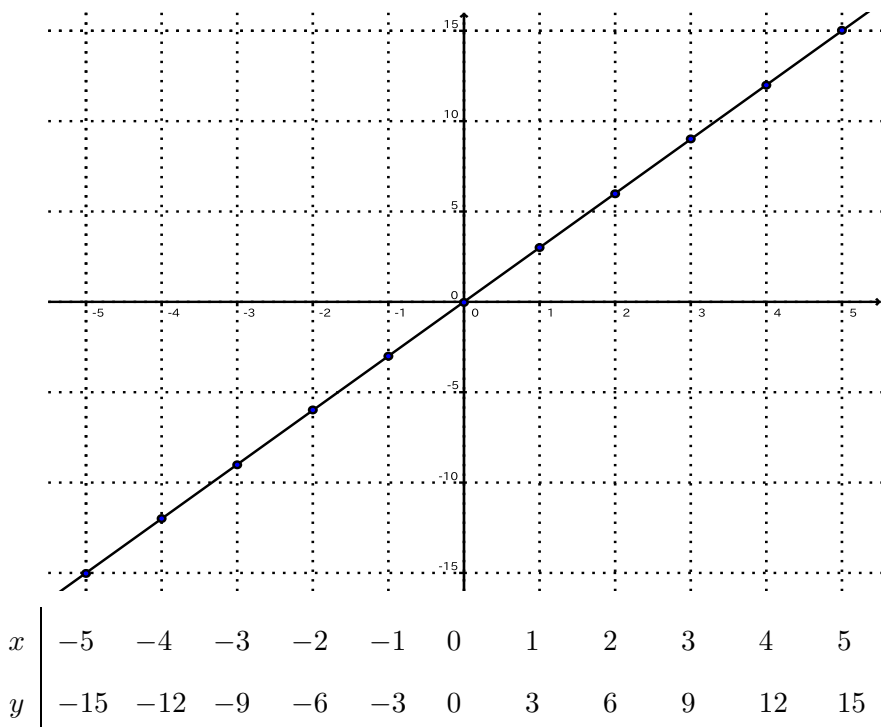
補足. ちなみに、「グラフをかく」の「かく」は「描く (draw)」でひらがなで表すことが多い。「書く (write)」ではない。

よくある似たようなものに、「○○のとき」の「とき」は「場合 (case)」の意味で「時 (time)」ではない。

例. まずはパソコンでかいた関数のグラフをいくつか見てみよう。下の段に数値も載せておく。

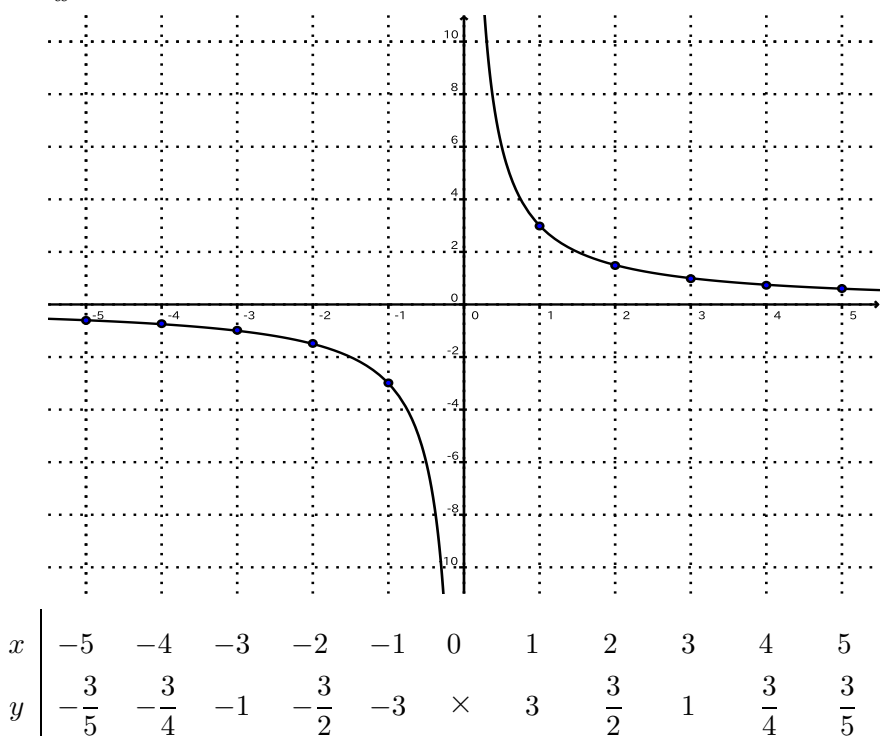
• $y = 3x$ (比例)

グラフは直線



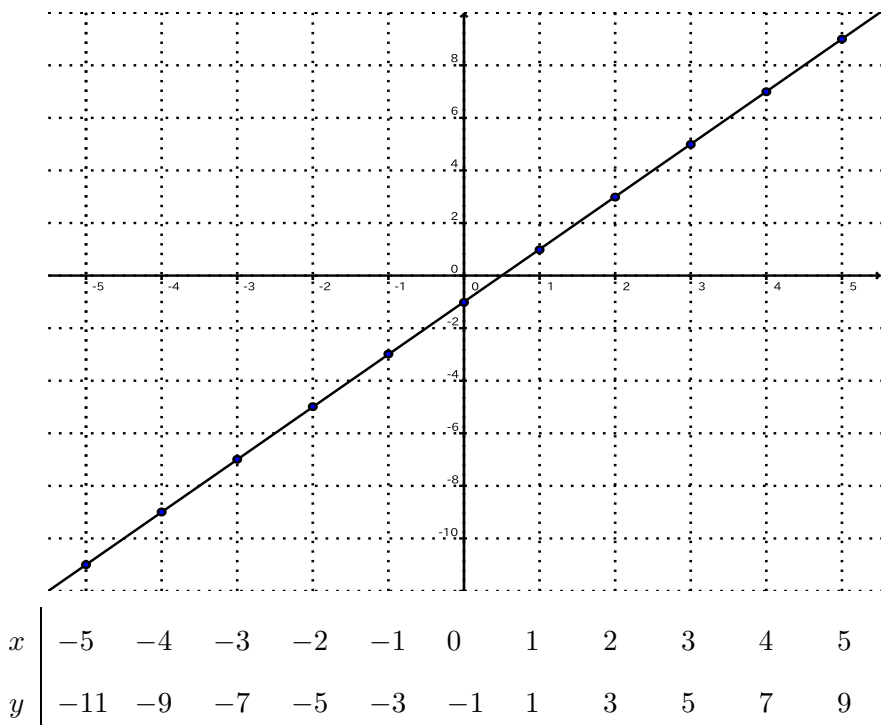
• $y = \frac{3}{x}$ (反比例)

グラフは双曲線



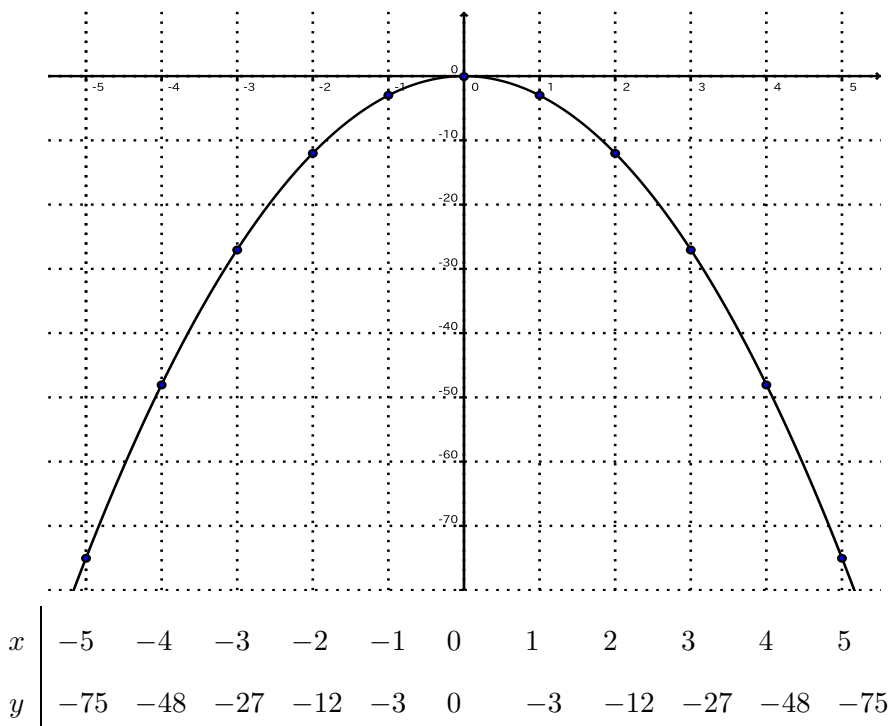
• $y = 2x - 1$ (1 次関数)

グラフは直線

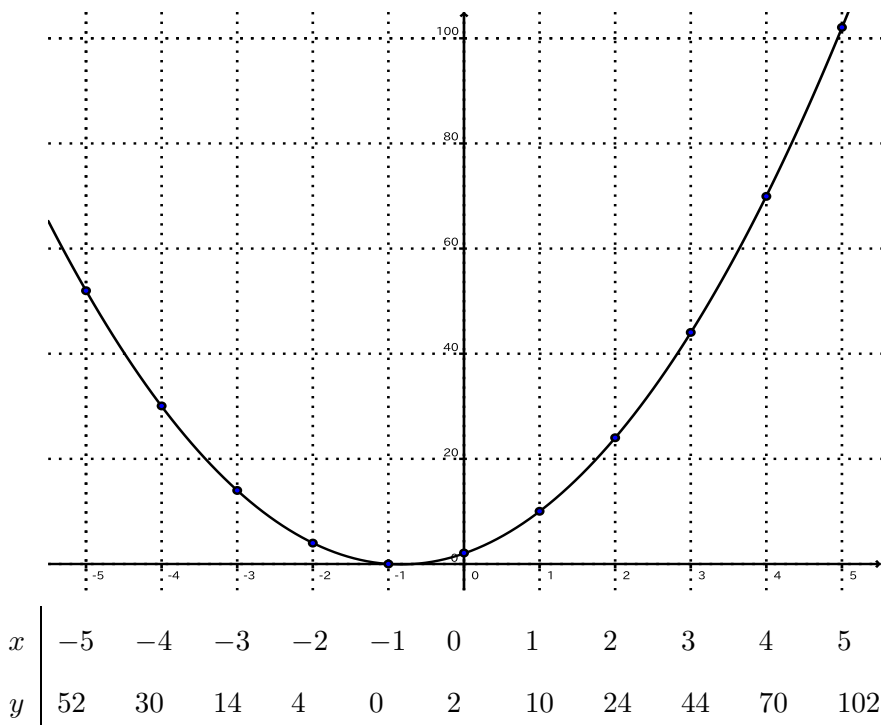


• $y = -3x^2$ (2 乗に比例する関数)

グラフは放物線



- $y = 3x^2 + 5x + 2$ (2次関数) グラフは放物線



■ グラフの交点

準備として，一般の関数の表し方を用意する．

定義. x の関数 y を表すのに $y = f(x)$ のように書くことにする．ここでの f は関数の名前を， (x) で x の関数であることを表している．

別の関数を表すときは $y = g(x)$ のように名前を変える．

また， $x = a$ のときの関数 $f(x)$ の値を $f(a)$ と表す．

例. ● $f(x) = 3x$ とすると， $y = f(x)$ は $y = 3x$ のことで，比例である．

また，例えば $x = 4$ のときの関数 $f(x)$ の値は， $f(4) = 3 \times 4 = 12$ である．

● $f(x) = \frac{3}{x}$ とすると， $y = f(x)$ は $y = \frac{3}{x}$ のことで，反比例である．

$x = 6$ のときの関数 $f(x)$ の値は， $f(6) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ である．

- こんどは名前を変えて g を用いてみる. $g(x) = 2x - 1$ とすると, $y = g(x)$ は $y = 2x - 1$ で 1 次関数である.

$x = 5$ のときの関数 $g(x)$ の値は, $g(5) = 2 \times 5 - 1 = 9$ である.

- $f(x) = -3x^2$ とすると, $y = f(x)$ は $y = -3x^2$ で 2 乗に比例する関数.

$x = -4$ のときの関数 $f(x)$ の値は, $f(-4) = -3 \times (-4)^2 = -48$ である.

- $g(x) = 3x^2 + 5x + 2$ とすると, $y = g(x)$ は $y = 3x^2 + 5x + 2$ で 2 次関数.

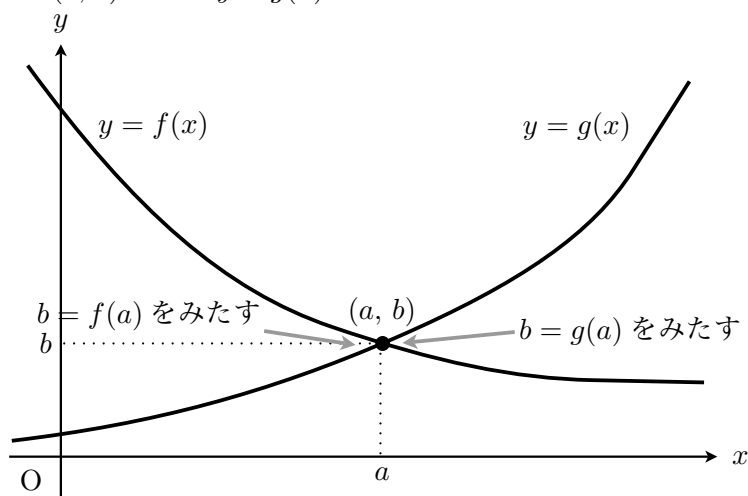
$x = 0$ のときの関数 $g(x)$ の値は, $g(0) = 3 \times 0^2 + 5 \times 0 + 2 = 2$ である.

定理. 2つの関数 $y = f(x)$ と $y = g(x)$ のそれぞれのグラフの共有点 (交点) の座標は,

連立方程式
$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x) \end{cases}$$
 の解として求まる.

証明. 連立方程式
$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x) \end{cases}$$
 の解を $(x, y) = (a, b)$ とする. これは, 方程式 $y = f(x)$ の解であるので, $b = f(a)$ をみたらす. よって, 点 (a, b) は関数 $y = f(x)$ のグラフ上にあることがわかる.

同様にして, 連立方程式の解 $(x, y) = (a, b)$ は, 方程式 $y = g(x)$ の解であるので, $b = g(a)$ をみたらす. よって, 点 (a, b) は関数 $y = g(x)$ のグラフ上にあることがわかる.



したがって、点 (a, b) は、2つの関数 $y = f(x)$ と $y = g(x)$ の両方のグラフ上にあるので
 共有点（交点）である。□

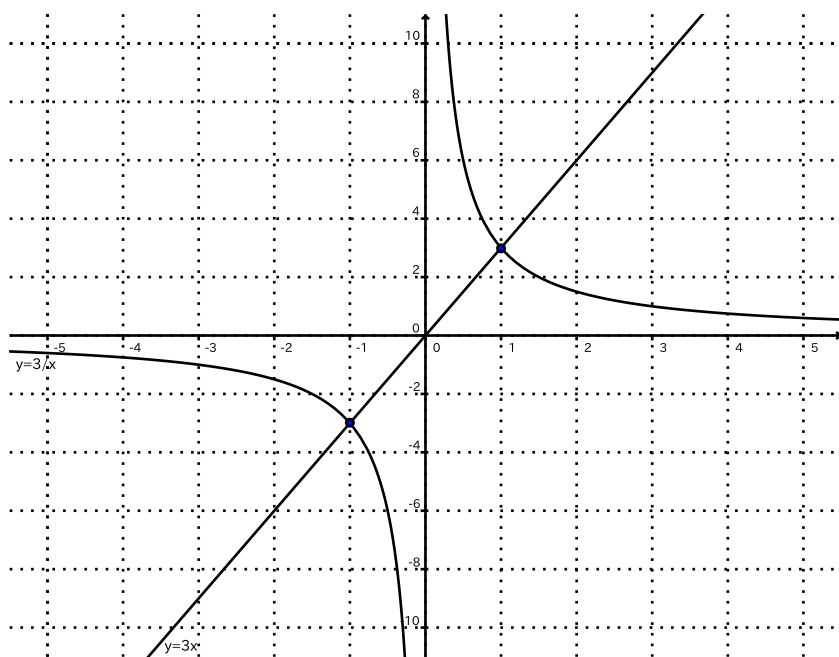
例. 2つの関数 $y = 3x$ （直線） と $y = \frac{3}{x}$ （双曲線） の交点の座標を求めてみる。

そのためには、連立方程式 $\begin{cases} y = 3x \\ y = \frac{3}{x} \end{cases}$ を解けばよい。

$3x = \frac{3}{x}$ より、両辺 x 倍すると、 $3x^2 = 3$ と2次方程式になる。解くと $x = 1, -1$ 。

よって、連立方程式の解は $(x, y) = (1, 3), (-1, -3)$ となる。

したがって、2つの関数のグラフの交点は2つあり、点 $(1, 3)$ と点 $(-1, -3)$ である。



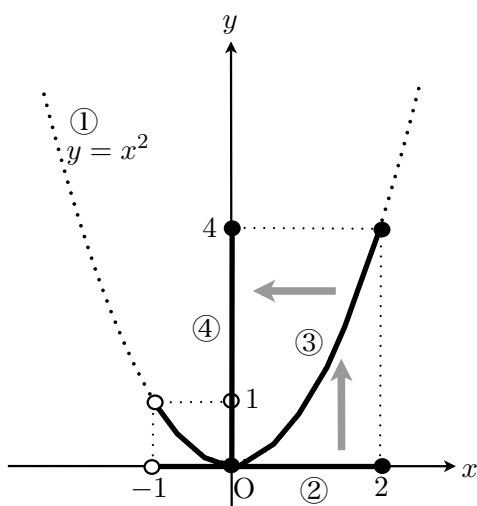
■ 関数の変域

y を x の関数とする。 x がその変域（定義域）内の値をとるときの関数 y の変域（値域）を
 考えるとき、グラフを用いると理解しやすい。

横方向の x の変域内のグラフをすべてかくために必要な縦方向の範囲が y の変域である。

例. 関数 $y = x^2$ において、 x の変域が $-1 < x \leq 2$ であるときの y の変域を求める。

- ① まず $y = x^2$ のグラフを点線でかく.
- ② x の変域を x 軸上にかく. このとき等号のあるなしで ● ○ を区別する.
- ③ x の変域内のグラフを実線でなぞる. やはり ● ○ を意識する.
- ④ 実線でかいたグラフを上下方向にすべて入れるための y の範囲を y 軸上にかく. やはり ● ○ に注意する. このとき, 端点だけに注目するのではない.
- ⑤ その y の変域を読み取ると $0 \leq y \leq 4$.



このように, x の変域内でグラフが上がったり下がったりするときは注意が必要である.

■ グラフの移動

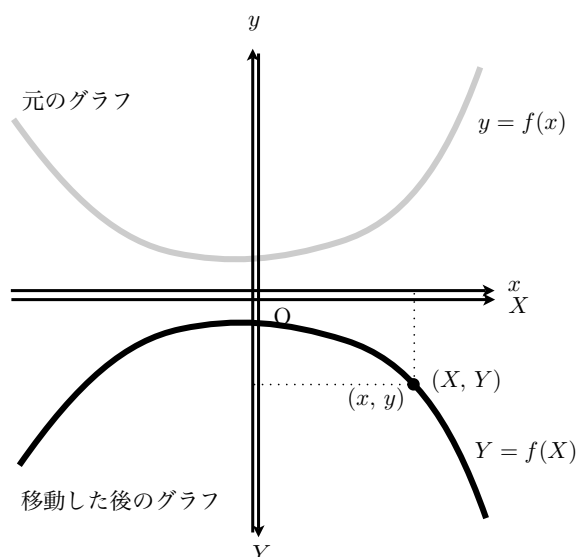
次にグラフについての移動について考える.

最低でもやり方(結論)だけ覚えておけば十分だが, 考え方はたいして難しくないので頑張って理解してもらいたい.

座標 (x, y) の他に, 移動した後のグラフを表すのにもうひとつの座標 (X, Y) を用いる.

定理 (x 軸対称【対称移動の一つ】). X 軸を x 軸と同じ向きに, Y 軸を y 軸と反対向きになるように重ねて (X, Y) 座標をつくる. (図ではわかりやすいように軸を少しずらしてかいてあるが実際は重なっている.)

このように (X, Y) 座標を設定すると, $y = f(x)$ のグラフを x 軸対称で移動した後のグラフは, (X, Y) 座標で見ると $Y = f(X)$ をみたしていることがわかる.



また, この対称移動したグラフ上の 1 点に注目すると, その座標は, (x, y) と (X, Y) の 2 通りで表せるが, (x, y) と (X, Y) の関係は,
$$\begin{cases} X = x \\ Y = -y \end{cases} \quad \text{である.}$$

これを代入することで, $-y = f(x)$ となる.

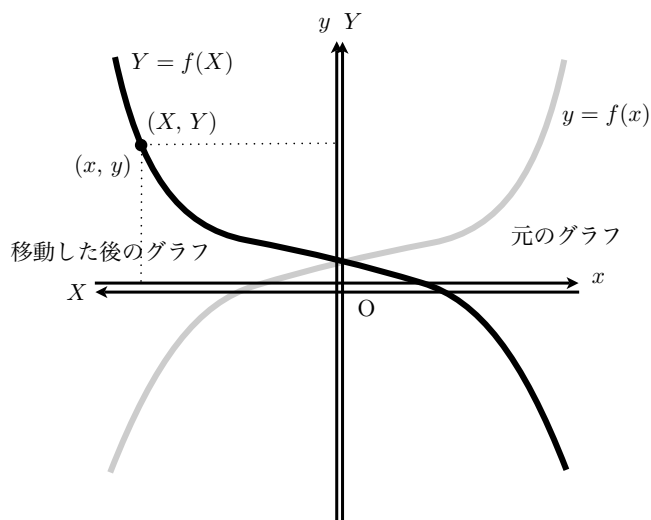
したがって, 関数 $y = f(x)$ のグラフを x 軸対称移動したグラフをもつ関数は

$$y = -f(x)$$

であることがわかる.

定理 (y 軸対称【対称移動の一つ】). X 軸を x 軸と反対向きに, Y 軸を y 軸と同じ向きになるように重ねて (X, Y) 座標をつくる.

このように (X, Y) 座標を設定すると, $y = f(x)$ のグラフを y 軸対称で移動した後のグラフは, (X, Y) 座標で見ると $Y = f(X)$ をみたしていることがわかる.



また、この対称移動したグラフ上の1点に注目した、 (x, y) と (X, Y) の関係は、
$$\begin{cases} X = -x \\ Y = y \end{cases}$$
である。

これを代入することで、 $y = f(-x)$ となる。

したがって、関数 $y = f(x)$ のグラフを x 軸対称移動したグラフをもつ関数は

$$y = f(-x)$$

であることがわかる。

定理 (原点对称【対称移動の一つ】)。原点对称も x 軸対称、 y 軸対称と同じように考えてもよいが、図形の性質で、原点对称は x 軸対称と y 軸対称を合わせたものであることがわかってるので、

$$y = f(x) \xrightarrow{x \text{ 軸対称}} y = -f(x) \xrightarrow{y \text{ 軸対称}} y = -f(-x)$$

となる。

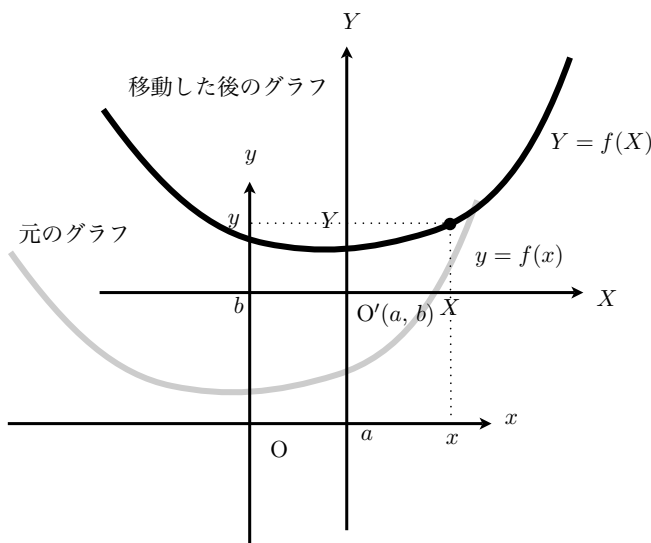
同じ方法で考えるなら、 (x, y) と (X, Y) の関係は、
$$\begin{cases} X = -x \\ Y = -y \end{cases}$$
であるので

$$y = -f(-x)$$

となる。

定理 (平行移動). x 軸方向に a だけ, y 軸方向に b だけ平行移動したグラフを考えると, (x, y) 座標で点 (a, b) の位置に原点 O' をもち x 軸 y 軸にそれぞれ同じ向きの X 軸 Y 軸をもつ, (X, Y) 座標を考える.

このように (X, Y) 座標を設定すると, $y = f(x)$ のグラフを y 軸対称で移動した後のグラフは, (X, Y) 座標で見ると $Y = f(X)$ をみたしていることがわかる.



そして, 平行移動したグラフ上の 1 点に注目した, (x, y) と (X, Y) の関係は,
$$\begin{cases} x = X + a \\ y = Y + b \end{cases}$$

であるので,
$$\begin{cases} X = x - a \\ Y = y - b \end{cases}$$
 である. これを代入すると, $y - b = f(x - a)$ となる.

したがって, 関数 $y = f(x)$ のグラフを x 軸方向に a だけ, y 軸方向に b だけ平行移動したグラフをもつ関数は方程式

$$y - b = f(x - a)$$

をみたすことがわかる. 後は必要に応じて式を整理すればよい.

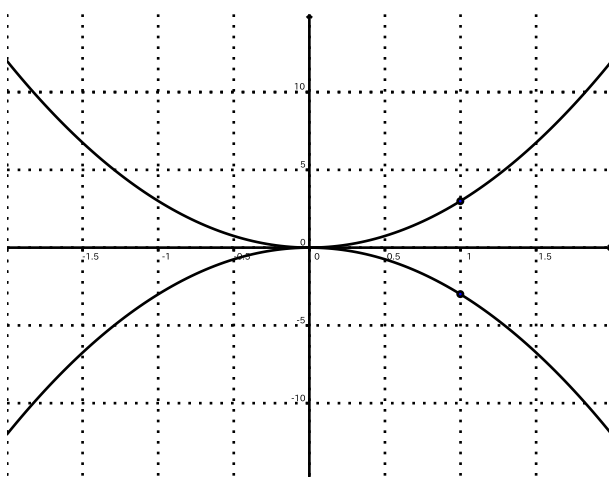
定理 (回転移動). 合同変換は, 対称移動, 平行移動, 回転移動の 3 種類なので, 回転移動の方法がわかれば合同変換をすべて式で表すことができることになる.

しかしながら, 回転移動は難しいので, ここでは省略する. 高校 2 年生で扱う.

【高2まで待てないという人のために!】 回転角を θ とすると、 $x = X \cos \theta - Y \sin \theta$, $y = X \sin \theta + Y \cos \theta$ の関係があるので、逆算して、 $X = x \cos \theta + y \sin \theta$, $Y = -x \sin \theta + y \cos \theta$. これを代入した式がグラフを回転させたときの図形を表す方程式になる。(一般には関数にはならない)

例. 関数 $y = -3x^2$ のグラフ (放物線) を x 軸対称で移動したグラフをもつ関数を求めてみよう.

x 軸対称なので、 y のところに $-y$ を代入すればよい. したがって、 $-y = -3x^2$. 整理して $y = 3x^2$ となる. 実際にグラフをかいてみると下の図のようになる.



例. 関数 $y = 3x^2 + 5x + 2$ のグラフ (放物線) を x 軸方向に $\frac{5}{6}$ だけ、 y 軸方向に $\frac{1}{12}$ だけ平行移動したグラフをもつ関数を求めてみよう.

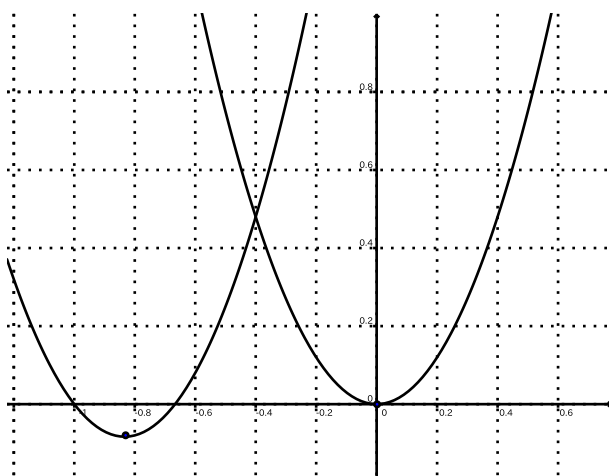
平行移動なので、 x のところに移動した分を引いた $x - \frac{5}{6}$ を、同様に y のところには $y - \frac{1}{12}$ を代入すればよい. したがって、

$$y - \frac{1}{12} = 3 \left(x - \frac{5}{6} \right)^2 + 5 \left(x - \frac{5}{6} \right) + 2$$

となる. 整理すると、

$$y = 3 \left(x^2 - \frac{5}{3}x + \frac{25}{36} \right) + 5 \left(x - \frac{5}{6} \right) + 2 + \frac{1}{12} = 3x^2$$

より、 $y = 3x^2$ となる.



4 (さて本題の) 1 次関数とは

定義. y が x の関数で, $y = ax + b$ (ただし $a \neq 0$) と表されるとき (つまり x の 1 次式のと き), y を x の **1 次関数** という.

例. • $y = 2x - 1$

• $y = -3x + 2$

• $y = 2x$ 比例は 1 次関数の特別な場合

■ 変化の割合

定理. 1 次関数 $y = ax + b$ の変化の割合は一定で a である.

証明. $x = x_1$ のとき, $y_1 = ax_1 + b$, $x = x_2$ のとき, $y_2 = ax_2 + b$ とする.

x が x_1 から x_2 に変化したときの変化の割合は,

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{(ax_2 + b) - (ax_1 + b)}{x_2 - x_1} = \frac{a(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = a$$

となり一定で a である. $\square$

補足. 逆に、変化の割合が一定で a の関数は $y = ax + b$ である。

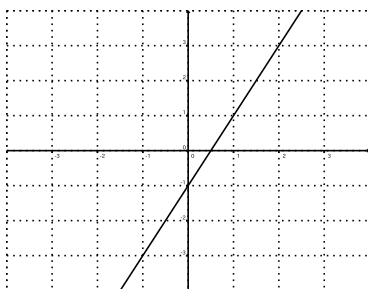
実際、関数を $y = f(x)$ とし、 x が x から x' まで変化したときの変化の割合を考える。

$\frac{f(x) - f(x')}{x - x'} = a$ であるので、分母を払って、 $f(x) - f(x') = a(x - x')$ 。整理すると、 $f(x) = ax - ax' + f(x')$ となる。ここで変数は x のみで、 x' を定数とみることで $f(x')$ も定数となるので、 $b = -ax' + f(x')$ とおくと、 $f(x) = ax + b$ と表せる。したがって、 $y = ax + b$ である。□

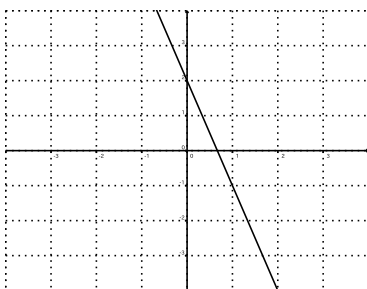
■ グラフの性質

例. $y = ax + b$ の a, b に数値を入れてパソコンでグラフをかいてみる。

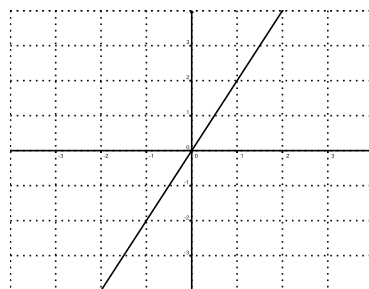
$$y = 2x - 1 \quad (a = 2, b = -1)$$



$$y = -3x + 2 \quad (a = -3, b = 2)$$



$$y = 2x \quad (a = 2, b = 0)$$



この例からわかること。

- グラフは直線である。

∵ 変化の割合が一定であるため。

- $a > 0$ のとき右上がり、 $a < 0$ のとき右下がりの直線になる

∵ 変化の割合は x が 1 増えたときの y の増加量なので、 $a > 0$ なら y 軸方向に増えるので右上がり、 $a < 0$ なら y 軸方向に減るので右下がりとなる。

- 直線と y 軸との交点 (y 切片という) の座標は $(0, b)$ である。

∵ $x = 0$ のとき $y = b$ であるので。

- x の係数が等しい 2 つの 1 次関数のグラフは平行になる.

∴ x の係数は変化の割合を表しているので.

定義. 1 次関数 $y = ax + b$ において, a の値をそのグラフの直線の**傾き**という.

またグラフと y 軸との交点を **y 切片**あるいは単に**切片** という.

注意. $y = ax + b$ において,

$$a = (x \text{ の係数}) = (\text{変化の割合}) = (\text{直線の傾き})$$

という重要な性質が得られる.

また, 定数項 b の値は, y 切片の y 座標を表す.

■ 直線の表す式の求め方

1 次関数のグラフは直線になることがわかったので, 直線を決定する要素が与えれば式が求まる.

図形の性質の「直線は異なる 2 点と同一である」より, 2 つ条件があれば直線がかけることになる.

このことを別の視点で見ると, 1 次関数の式は $y = ax + b$ であり, 変数以外の文字は a, b の 2 つであるので, a, b の値が定まれば 1 次関数の性質が決まる. よってやはり, 2 つ条件があればよいということになる.

以下, 2 つの条件の与えられ方の例をあげ, どのように求めるかを見ていく.

例. 1 次関数の式を $y = ax + b$ とする.

- 傾きと切片の座標が与えられているとき.

【例題】グラフの直線の傾きが 4 で, y 切片の座標が $(0, -3)$ である 1 次関数の式を求めよ.

【解答】傾きが 4 であるので $a = 4$. また, y 切片の y 座標が -3 であるので $b = -3$.
したがって, $y = 4x - 3$.

- グラフの直線が通る 2 点の座標が与えられているとき.

【例題】グラフの直線が 2 点 $(1, 1)$, $(2, 5)$ を通る 1 次関数の式を求めよ.

【解答】まず, $(1, 1)$ を通るので 1 次関数の式に代入して, $1 = a + b$ を得る. また, $(2, 5)$ を通るので代入して $5 = 2a + b$ となる.

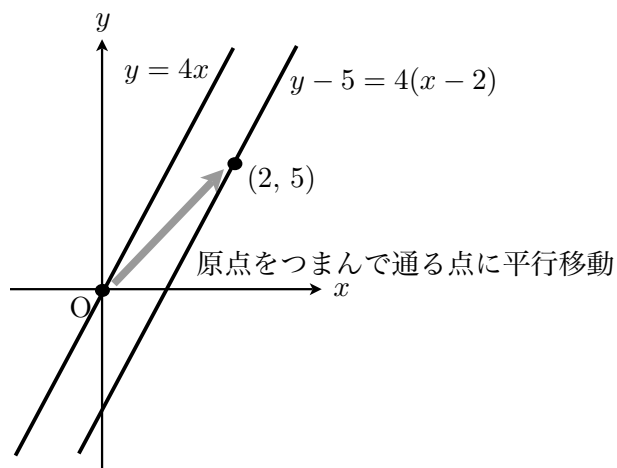
よって, a, b についての連立方程式
$$\begin{cases} a + b = 1 \\ 2a + b = 5 \end{cases}$$
 を解いて $a = 4, b = -3$ となる.
したがって, $y = 4x - 3$.

- 傾きと通る 1 点を与えられているとき

【例題】グラフの直線の傾きが 4 で, 点 $(2, 5)$ を通る 1 次関数の式を求めよ.

【解答】傾きが 4 であるので $a = 4$. よって, $y = 4x + b$ となるので, 通る点 $(2, 5)$ を代入して, $5 = 8 + b$. $\therefore b = -3$. したがって, $y = 4x - 3$.

【別解】傾きが 4 であり原点を通る直線 (これは簡単. 比例の式で $y = 4x$) を x 軸方向に 2 だけ, y 軸方向に 5 だけ平行移動したと考えると, 求める方程式は $y - 5 = 4(x - 2)$ となる. これを整理して, $y = 4x - 3$ と即答.



■ 関数の変域

1 次関数においてはグラフが直線なので, 関数の変域はわかりやすい. グラフのところでも触れたがもう一度手順を確認しよう.

例. • $y = 3x - 2 \quad (1 < x \leq 3)$

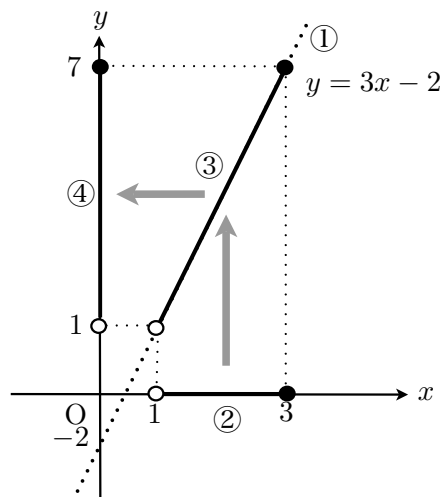
① まず $y = 3x - 2$ のグラフを点線でかく.

② x の変域を x 軸上にかく. ● ○ に注意する.

③ x の変域内のグラフを実線でなぞる. ● ○ に注意する.

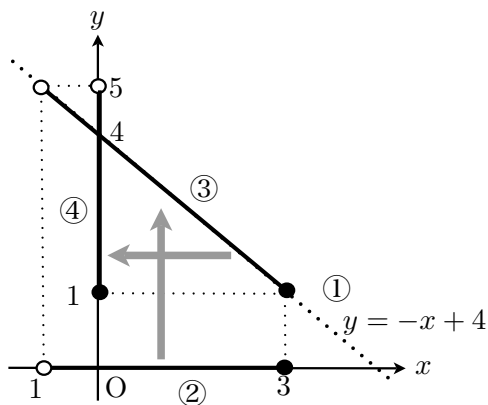
④ 実線でかいたグラフをすべて入れるための y の範囲を y 軸上にかく. ● ○ に注意する.

⑤ その y の変域を読み取ると, $1 < y \leq 7$.



• $y = -x + 4 \quad (-1 < x \leq 3)$

説明は省略. $1 \leq y < 5$.

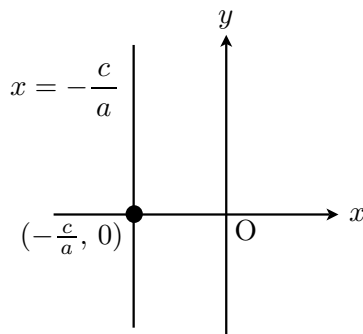


■ 方程式とグラフ

x と y の 1 次方程式 $ax + by + c = 0$ において、このとき a と b は同時に 0 にならないとする。(このことを $(a, b) \neq (0, 0)$ と書く.)

$b \neq 0$ のとき、 $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$ と式変形をすると、 x の関数 y となるので、グラフは直線である。

また、 $b = 0$ のとき、 $a \neq 0$ であるので、 $x = -\frac{c}{a}$ となる。この式が表す図形は、 y の値が何であつても x は一定の値 $-\frac{c}{a}$ をとるということなので、 $(-\frac{c}{a}, 0)$ を通り y 軸に平行な直線になる。

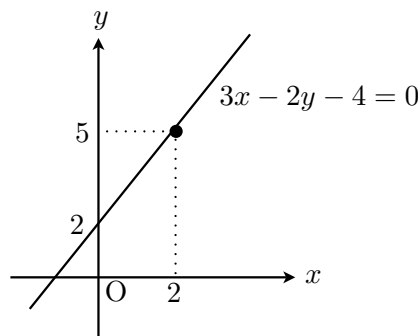


したがって、 x と y の 1 次方程式 $ax + by + c = 0$ が表す図形は直線である。

1 次方程式の表す図形である直線にかくには、上で説明した通り、 $b \neq 0$ のときは $y =$ の関数の型に直してグラフを、 $b = 0$ のときは $x =$ の式にして y 軸に平行な直線をかけばよい。

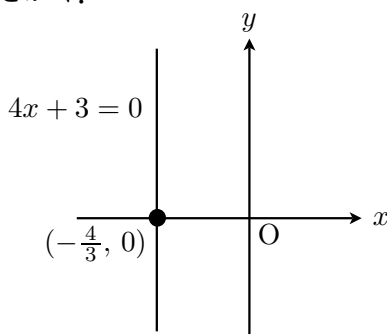
例. • $3x - 2y + 4 = 0$ の表す図形にかく。

y の係数は -2 で 0 でないので、 $y = \frac{3}{2}x + 2$ と関数の型に直してグラフをかけばよい。



• $3x + 4 = 0$ の表す図形にかく。

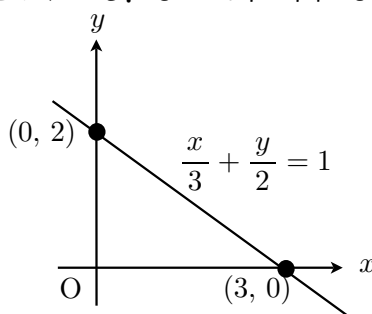
y の項がない (y の係数が 0 である) ので, $x = -\frac{4}{3}$ と $x =$ の式にして, 点 $\left(-\frac{4}{3}, 0\right)$ を通り y 軸に平行な直線にかく.



- 直線にかくには通る 2 点がわかれば十分なので, 方程式から直ぐに 2 点が求まる場合は, 必ずしも関数の型に書き直す必要はない.

例えば, $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$.

$y = 0$ とすると $x = 3$, $x = 0$ とすると $y = 2$ となるので, この方程式が表す直線は 2 点 $(3, 0)$, $(0, 2)$ を通ることがわかる. よって下の図のようになる.

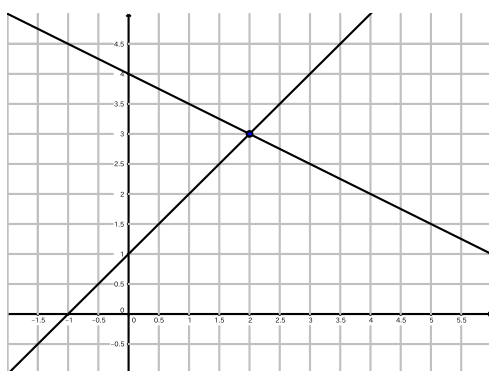


■ グラフの交点

直線を表す式が関数の型であっても, 1 次方程式の型であっても, 2 つの式を連立させその連立方程式を解けば交点の座標が求まる.

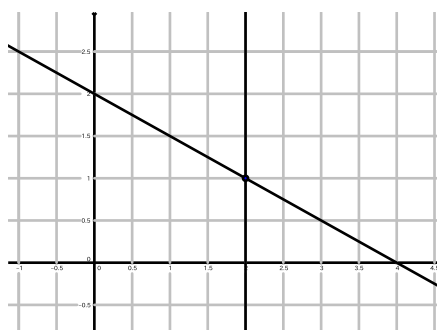
例. ● 2 つの直線 $y = x + 1$, $y = -\frac{1}{2}x + 4$ の交点を求める.

連立方程式
$$\begin{cases} y = x + 1 \\ y = -\frac{1}{2}x + 4 \end{cases}$$
 を解くと, $x = 2$, $y = 3$ となるので交点の座標は $(2, 3)$.



- 2つの直線 $\frac{x}{4} + \frac{y}{2} = 1$, $x = 2$ の交点を求める.

連立方程式 $\begin{cases} \frac{x}{4} + \frac{y}{2} = 1 \\ x = 2 \end{cases}$ を解くのは容易. $x = 2, y = 1$ より交点の座標は $(2, 1)$.



■ 平行な直線, 垂直な直線

2直線が, 平行や垂直であるとき, その直線を表す式がみたす条件について考える.

2つの直線を表す1次関数を $y = ax + b$ と $y = cx + d$ とする.

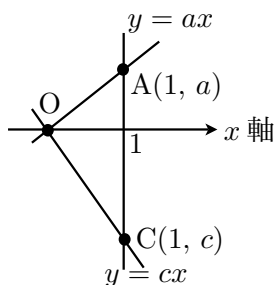
定理 (平行条件). 2直線が平行であるのは, 傾きが等しく, 重なっていないときである. よって, みたすべき条件は,

$$\begin{cases} a = c & \text{傾きが等しい} \\ b \neq d & \text{重なっていない} \end{cases}$$

となる.

つまり, **同じ式ではなく x の係数が等しければ平行である.**

定理 (垂直条件). 2直線にそれぞれ平行で原点を通る直線 $y = ax$ と $y = cx$ で垂直になるための条件を考える. 交点は原点であり, また, $x = 1$ における直線上の点をそれぞれ A, C とすると, $A(1, a)$ と $C(1, c)$ となる.



2直線が垂直とは, $\triangle OAC$ が, $\angle AOC = 90^\circ$ の直角三角形であることなので, 三平方の定理より, $OA^2 + OC^2 = AC^2$ と同値である. したがって, $1^2 + a^2 + 1^2 + c^2 = (a - c)^2$ より, $ac = -1$ となる.

つまり, x の係数どうしの積が -1 ならば垂直である.

例. 点 $(1, 3)$ を通り, グラフが $y = 2x + 4$ のグラフと (1) 平行 (2) 垂直 である直線の式をそれぞれ求める.

(1) 平行なので, x の係数は等しく 2. また, 点 $(1, 3)$ を通るので,

$$y - 3 = 2(x - 1) \text{ をみたす. したがって, } y = 2x + 1.$$

(2) 垂直なので, x の係数はかけて -1 になる $-\frac{1}{2}$. また, 点 $(1, 3)$ を通るので,

$$y - 3 = -\frac{1}{2}(x - 1) \text{ をみたす. したがって, } y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}.$$

補足. 1 次方程式の場合は, $y =$ の関数の型に直して考えれば今は十分であるが, 簡単な判定法があるので結論だけ紹介する. 証明は $y =$ の型に直してから上の結果を適用すれば得られる. 覚えていて損はない.

定理. 2つの直線を表す方程式を $ax + by + p = 0$ と $cx + dy + q = 0$ とする.

平行条件: $ad - bc = 0$ かつ $a : b : p \neq c : d : q$

垂直条件: $ac + bd = 0$