

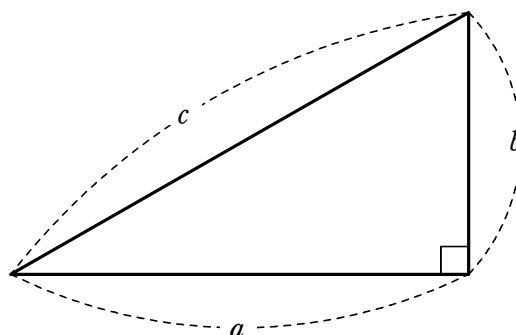
三角比と三角関数

1 三平方の定理（ピタゴラスの定理）

右の図の直角三角形に対して、

$$a^2 + b^2 = c^2$$

が成り立つ。



【証明】 右の図のように、直角三角形を4枚並べて

正方形 ABCD を作る。このとき、正方形 ABCD の

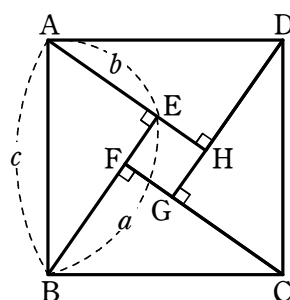
面積を c を用いて表すと、 c^2 …… ①

また、正方形 ABCD の面積を

(4つの直角三角形の面積)+(正方形 EFGH)

と考えると、 a 、 b を用いて表すと、正方形 EFGH の1辺の

長さが $a - b$ であることに注意して、



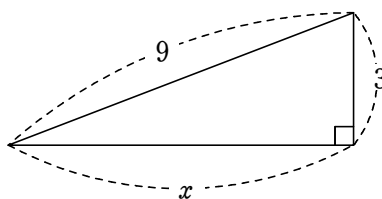
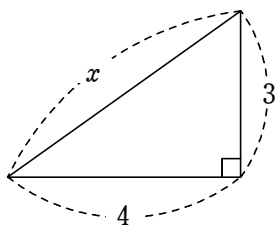
$$4 \times \triangle ABE + (\text{正方形 EFGH}) = 4 \times \frac{1}{2}ab + (a - b)^2$$

$$= 2ab + (a^2 - 2ab + b^2)$$

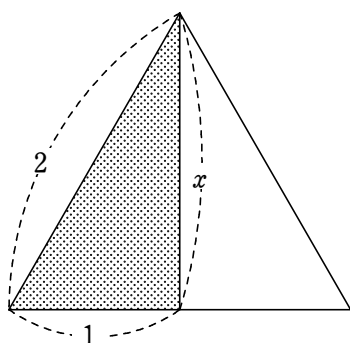
$$= a^2 + b^2 \quad \dots\dots ②$$

①、② が等しいから、 $a^2 + b^2 = c^2$ が成り立つ。

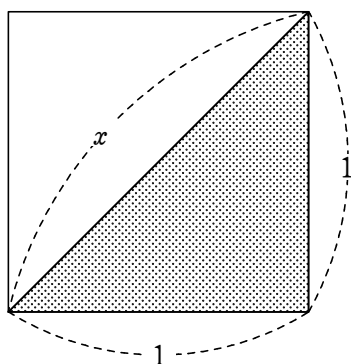
【例】 次の直角三角形の辺の長さ x を求めよう。



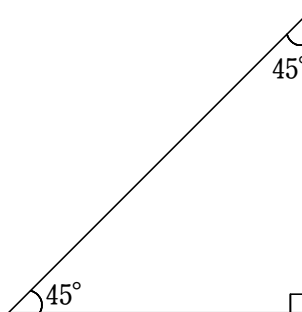
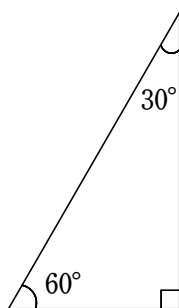
例 1 辺の長さが 2 の正三角形の高さ x を求めよう。



例 1 辺の長さが 1 の正方形の対角線の長さ x を求めよう。



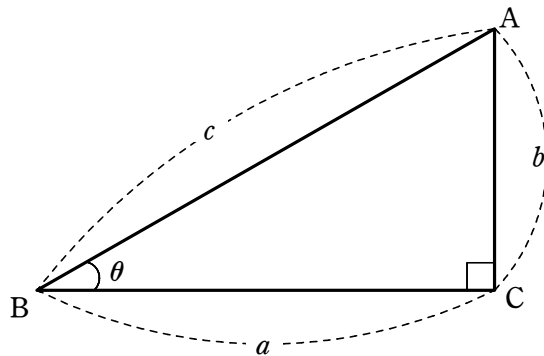
今求めた 2 つの直角三角形の 3 辺の長さの比は覚えておこう。



2 三角比

2. 1 定義

直角三角形 ABC に対して、次のように $\sin \theta$, $\cos \theta$, $\tan \theta$ を定義する。



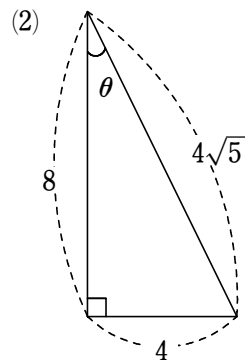
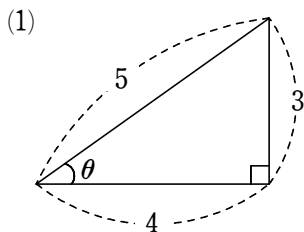
$$\sin \theta = \frac{b}{c} \left(\frac{\text{高さ}}{\text{斜辺}} \right) \quad (\text{サイン・シータ (sine theta)})$$

$$\cos \theta = \frac{a}{c} \left(\frac{\text{底辺}}{\text{斜辺}} \right) \quad (\text{コサイン・シータ (cosine theta)})$$

$$\tan \theta = \frac{b}{a} \left(\frac{\text{高さ}}{\text{底辺}} \right) \quad (\text{タンジェント・シータ (tangent theta)})$$

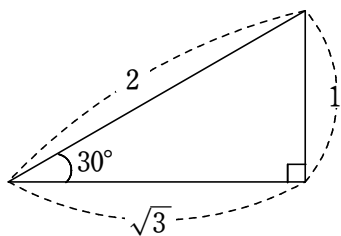
$\sin \theta$, $\cos \theta$, $\tan \theta$ の値は、三角形の大きさによらず、角 θ によってのみ決まる。

例 次の直角三角形に対し、 $\sin \theta$, $\cos \theta$, $\tan \theta$ の値を求めよう。

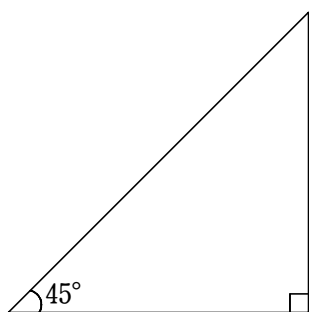


例 次の角 θ に対する $\sin \theta$, $\cos \theta$, $\tan \theta$ の値を求めよう。

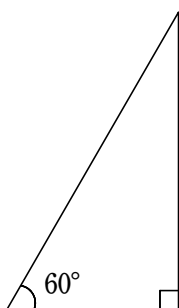
(1) $\theta = 30^\circ$



(2) $\theta = 45^\circ$



(3) $\theta = 60^\circ$



角 θ に対する $\sin \theta$, $\cos \theta$, $\tan \theta$ の値は, 次のページの表のようになる。
($\theta = 0^\circ$, 90° の場合については後で説明する。)

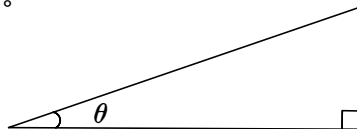
三角比を使うと例えば次のようなものが求められる。

例 木の根もとから 6 m 離れた地点に立って木の先端を見上げると, 水平面とのなす角が 20° であった。目の高さが 1.7 m のとき, 木の高さはどのくらいだろうか。

2. 2 三角比の相互関係

例 $\sin \theta = \frac{5}{13}$ のとき、直角三角形の 3 辺はどうなっているだろうか。

また、このときの $\cos \theta$ 、 $\tan \theta$ の値を求めよう。

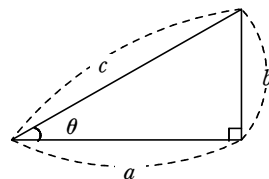


三角比の定義から、

$$\frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \sin \theta \div \cos \theta = \frac{b}{c} \div \frac{a}{c} = \frac{b}{a} = \tan \theta$$

$$(\sin \theta)^2 + (\cos \theta)^2 = \left(\frac{b}{c}\right)^2 + \left(\frac{a}{c}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2} = 1$$

$$1 + (\tan \theta)^2 = 1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2}{a^2} = \frac{c^2}{a^2} = 1 \div \left(\frac{a}{c}\right)^2 = \frac{1}{(\cos \theta)^2}$$



が成り立つ。ここで、三角比では自然数 n に対し、 $(\sin \theta)^n$ を $\sin^n \theta$ と書くのが一般的なので、これらの式は次のようにまとめられる。

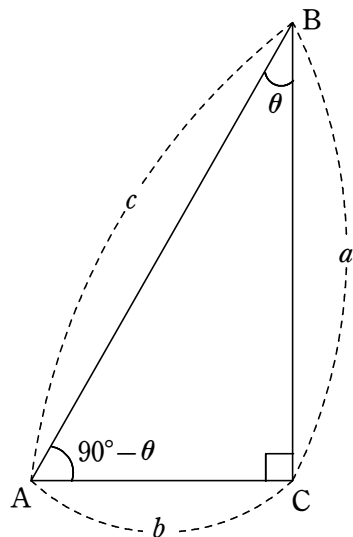
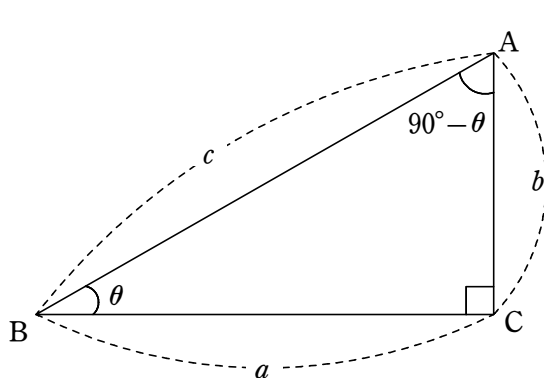
$$[1] \quad \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

$$[2] \quad \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

$$[3] \quad 1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

例 $\sin \theta = \frac{5}{13}$ のときの $\cos \theta$, $\tan \theta$ を, [1] ~ [3] の式を用いて求めてみると

また, 次の図から, $90^\circ - \theta$ に対する三角比の値もわかる。



$$\sin(90^\circ - \theta) =$$

$$\cos(90^\circ - \theta) =$$

$$\tan(90^\circ - \theta) =$$

例 $\sin 43^\circ = \cos \boxed{}, \cos 81^\circ = \sin \boxed{}$

2.3 加法定理

例えば, 2つの角 α , β に対して, $\sin(\alpha + \beta)$ の値はどうなるだろうか。

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha + \sin \beta$$

は成り立つだろうか。

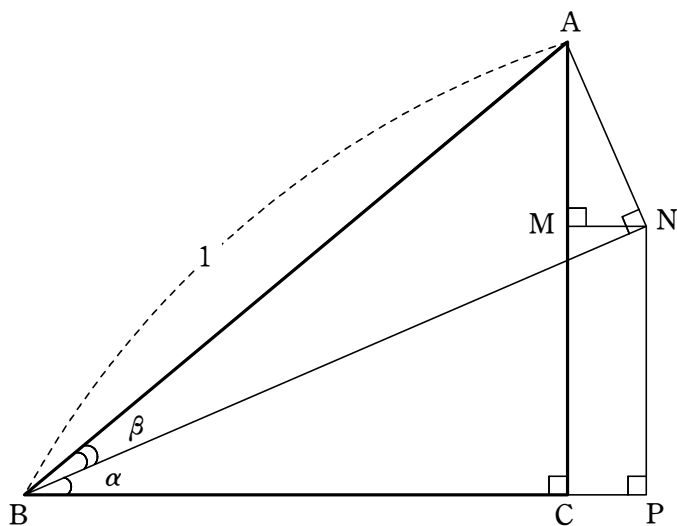
たとえば, $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 30^\circ$ として確認してみよう。

$$\sin(30^\circ + 30^\circ) =$$

$$\sin 30^\circ + \sin 30^\circ =$$

よって $\sin(30^\circ + 30^\circ) = \sin 30^\circ + \sin 30^\circ$ は

例 次の図を利用して, $\sin(\alpha + \beta)$, $\cos(\alpha + \beta)$ を求めてみよう。



$\sin(\alpha + \beta) = \frac{AC}{AB} = AC$ で, $AC = AM + MC$ と考え, それぞれ長さを求めると...

次のことが言える。

$$[1] \quad \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$[2] \quad \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$[3] \quad \tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$$

また, $\alpha - \beta$ のときは, 右辺の符号が入れ替わる。

$$[1'] \quad \sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

$$[2'] \quad \cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

$$[3'] \quad \tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$$

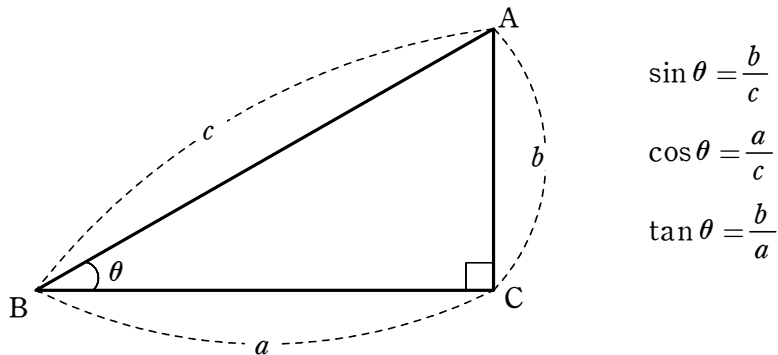
例 $75^\circ = 30^\circ + 45^\circ$ であることを利用して, $\sin 75^\circ$, $\cos 75^\circ$, $\tan 75^\circ$ を求めよう。

3 三角関数

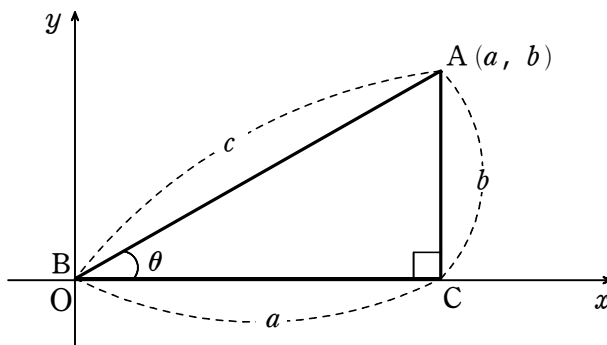
3. 1 定義

直角三角形で $\sin \theta$, $\cos \theta$, $\tan \theta$ を考えると, 角 θ の範囲は $0^\circ < \theta < 90^\circ$ に限られてしまうが, もっと大きい角 θ に対しても $\sin \theta$, $\cos \theta$, $\tan \theta$ の値を求められるように, 今までの話を拡張させて $\sin \theta$, $\cos \theta$, $\tan \theta$ を定義しなおすことにする。

直角三角形 ABC に対して, 次のように $\sin \theta$, $\cos \theta$, $\tan \theta$ を定義した。



この直角三角形を点 B が原点 O と重なるように座標平面上にのせると, 点 A の座標は (a, b) となる。



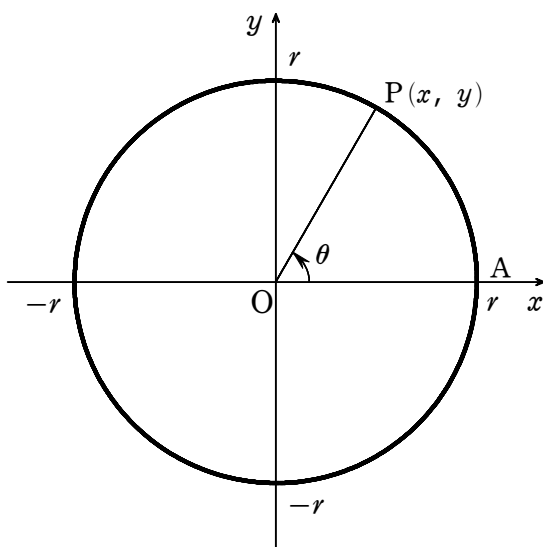
ここでは, a は点 A の x 座標, b は点 A の y 座標, c は原点と点 A の距離である。

よって, $\sin \theta$, $\cos \theta$, $\tan \theta$ を

$$\sin \theta = \frac{b}{c} \left(\frac{y \text{ 座標}}{\text{原点からの距離}} \right)$$
$$\cos \theta = \frac{a}{c} \left(\frac{x \text{ 座標}}{\text{原点からの距離}} \right)$$
$$\tan \theta = \frac{b}{a} \left(\frac{CA}{OC} = \text{直線 OA の傾き} \right)$$

と定義することにする。

座標平面上で、原点 O を中心とする半径 r の円をかき、点 $(r, 0)$ を A とする。



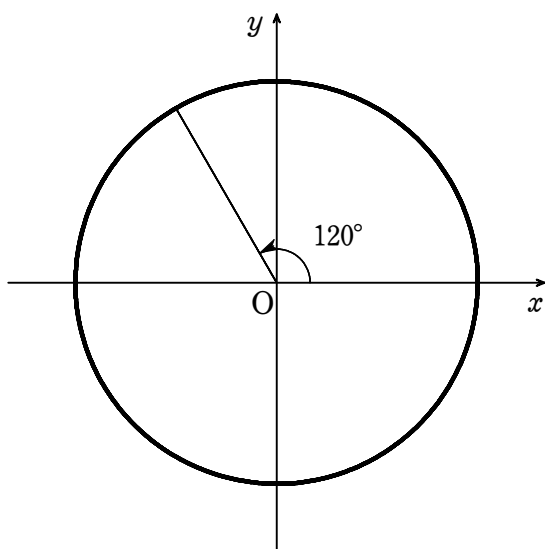
半径 OA を O の周りに反時計回りに θ だけ回転させて得られる半径を OP とし、 P の座標を (x, y) とする。このとき、

$$\sin \theta = \frac{y}{r} \left(\frac{\text{点 } P \text{ の } y \text{ 座標}}{\text{円の半径}} \right), \quad \cos \theta = \frac{x}{r} \left(\frac{\text{点 } P \text{ の } x \text{ 座標}}{\text{円の半径}} \right),$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x} \text{ (OP の傾き)}$$

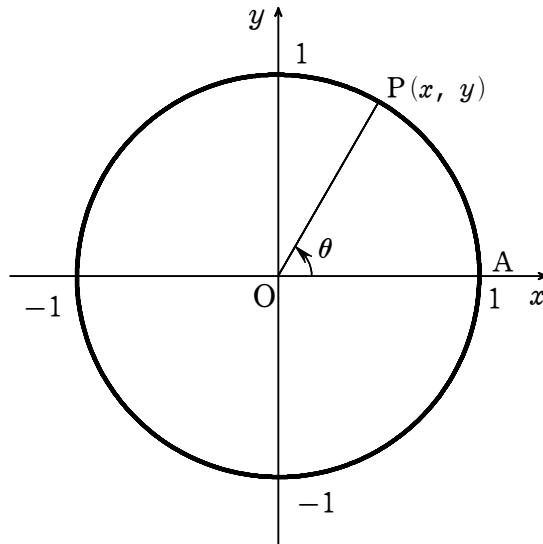
とする。ここで、 θ は 360° を超えてもよいし、負でもよい。

例 $\sin 120^\circ$, $\cos 120^\circ$, $\tan 120^\circ$ の値を求めよう。



$$\sin \theta = \frac{y}{r}, \quad \cos \theta = \frac{x}{r}, \quad \tan \theta = \frac{y}{x}$$

の値は半径 r の値によらず、 θ の値だけで定まるので、円の半径 r を 1 にして考えることにする。半径 1 の円を単位円という。



このとき、

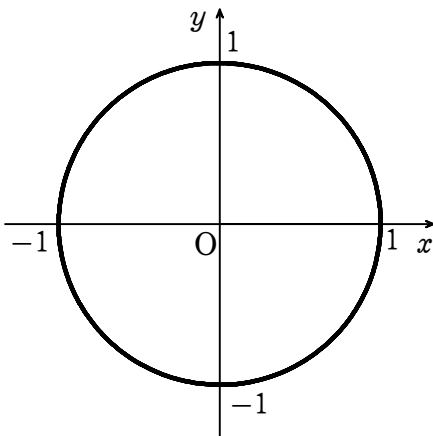
$$\sin \theta = y \text{ (点 P の } y \text{ 座標)}, \quad \cos \theta = x \text{ (点 P の } x \text{ 座標)}$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x} \text{ (OP の傾き)}$$

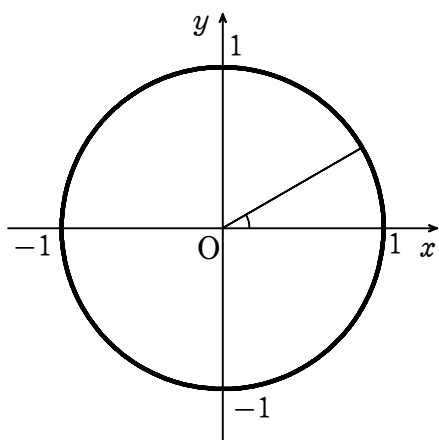
となる。

例 次の角 θ に対する $\sin \theta$, $\cos \theta$, $\tan \theta$ の値を求めよう。

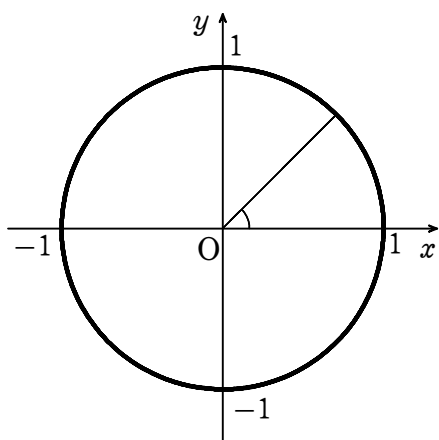
(1) $\theta = 0^\circ$



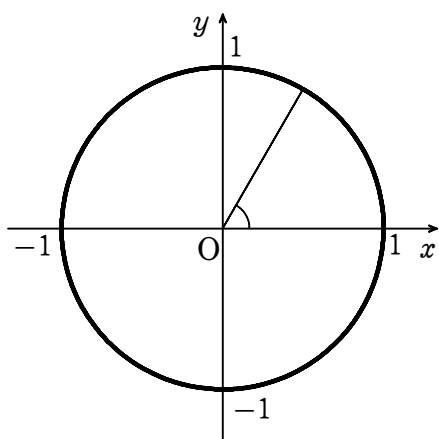
(2) $\theta = 30^\circ$



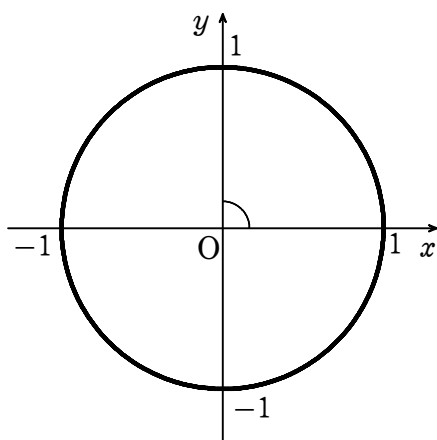
(3) $\theta = 45^\circ$



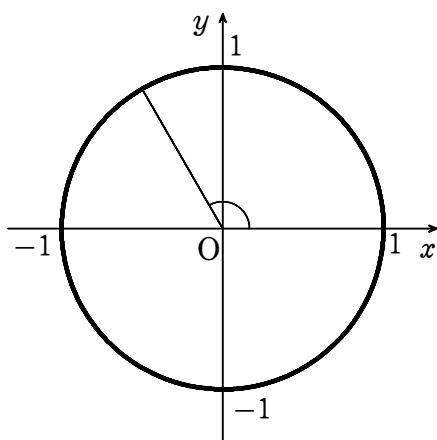
(4) $\theta = 60^\circ$



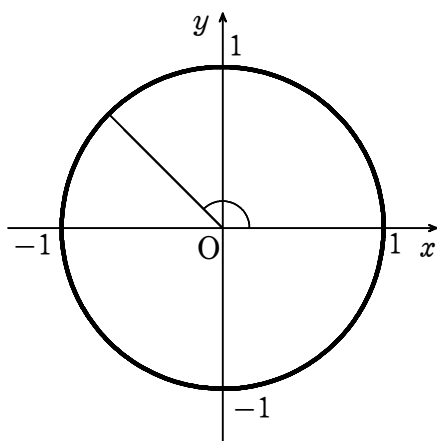
(5) $\theta = 90^\circ$



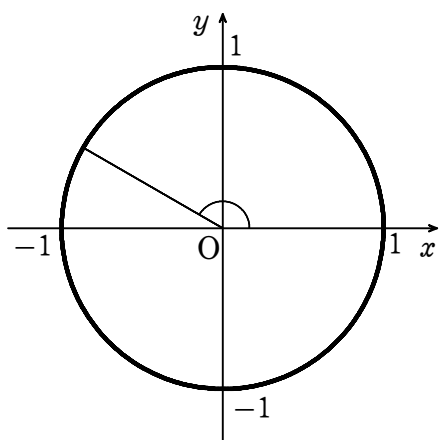
(6) $\theta = 120^\circ$



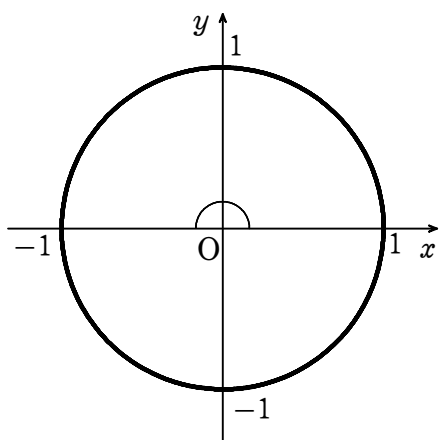
(7) $\theta = 135^\circ$



(8) $\theta = 150^\circ$



(9) $\theta = 180^\circ$



例 $\sin 330^\circ$ の値を求めよう。

例 $\sin(-30^\circ)$ の値を求めよう。

$\sin \theta$, $\cos \theta$, $\tan \theta$ を定義しなおしたが, 三角比のときの関係式は同じように成り立つ。

●三角関数の相互関係

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \quad \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \quad 1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

● $90^\circ - \theta$ の三角関数

$$\sin(90^\circ - \theta) = \cos \theta \quad \cos(90^\circ - \theta) = \sin \theta \quad \tan(90^\circ - \theta) = \frac{1}{\tan \theta}$$

●加法定理

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta, & \sin(\alpha - \beta) &= \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \\ \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta, & \cos(\alpha - \beta) &= \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \\ \tan(\alpha + \beta) &= \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}, & \tan(\alpha - \beta) &= \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} \end{aligned}$$

また加法定理から, 次の公式が得られる。

●2倍角の公式

$$\begin{aligned} \sin 2\alpha &= 2\sin \alpha \cos \alpha \\ \cos 2\alpha &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 \\ \tan 2\alpha &= \frac{2\tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha} \end{aligned}$$

●半角の公式

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2} \quad \cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2} \quad \tan^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}$$

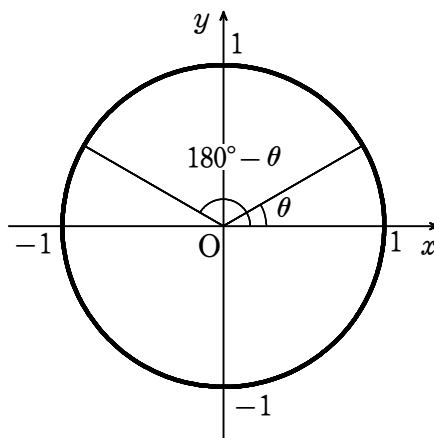
3. 2 三角関数の性質

● $180^\circ - \theta$

$$\sin(180^\circ - \theta) =$$

$$\cos(180^\circ - \theta) =$$

$$\tan(180^\circ - \theta) =$$



同じようにして,

$$\sin(-\theta) = -\sin \theta$$

$$\cos(-\theta) = \cos \theta$$

$$\tan(-\theta) = -\tan \theta$$

$$\sin(180^\circ + \theta) = -\sin \theta$$

$$\cos(180^\circ + \theta) = -\cos \theta$$

$$\tan(180^\circ + \theta) = \tan \theta$$

$$\sin(\theta + 360^\circ) = \sin \theta$$

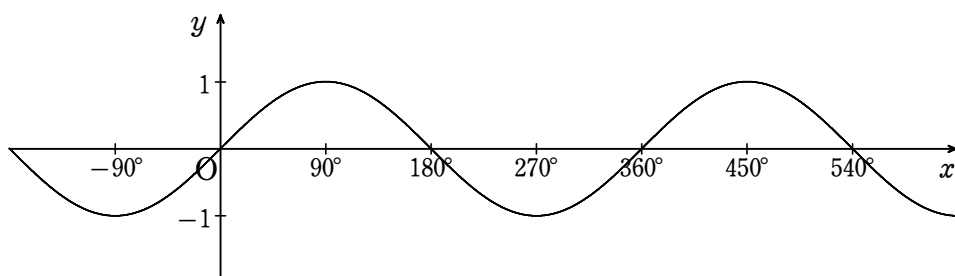
$$\cos(\theta + 360^\circ) = \cos \theta$$

$$\tan(\theta + 360^\circ) = \tan \theta$$

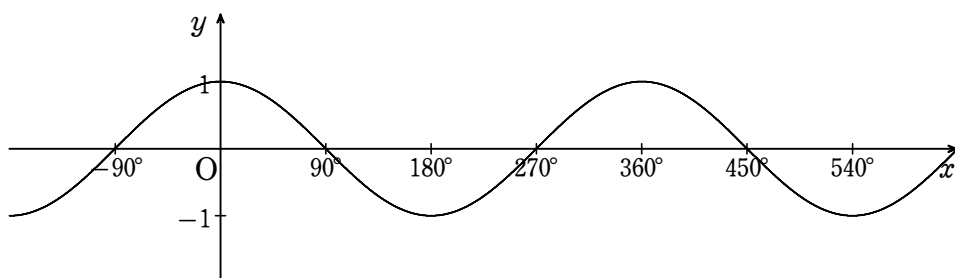
等も導くことができる。

3. 3 三角関数のグラフ

- $y = \sin x$ のグラフ



- $y = \cos x$ のグラフ



- $y = \tan x$ のグラフ

